INVESTIGACIÓN Y PRAXIS

EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Editores

Juan Pablo Salazar Torres - Yudith Liliana Contreras Santander

Jhon-Franklin Espinosa-Castro

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

BARRANQUILLA Y CÚCUTA - COLOMBIA | VIGILADA MINEDUCACIÓN

Res. 23095, del MEN

INVESTIGACIÓN Y PRAXIS
EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

INVESTIGACIÓN Y PRAXIS
EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Compiladores: Juan Pablo Salazar Torres • Yudith Liliana Contreras Santander • Jhon-Franklin Espinosa-Castro

Facultad de Ciencias Básicas (UFPS - Cúcuta)

Facultad de Ciencias Básicas y Biomédicas (Unisimón)

Facultad de Educación, Artes y Humanidades (UFPS - Cúcuta)

Departamento de Ciencias Básicas, Sociales y Humanas (Unisimón-Cúcuta)

Grupo de Investigación, Educación, Ciencias Sociales y Humanas (Unisimón)

Grupo de Investigación en Ciencias Exactas, Físicas y Naturales Aplicadas (GICEFYNA - Unisimón)

Grupo de Investigación Euler y Arquímedes (UFPS)

Grupo de Investigación en Pedagogía y Prácticas Pedagógicas GIPEPP (UFPS)

Grupo de Investigación en Modelamiento Científico e Innovación Empresarial (GIMCINE - Unisimón)

Grupo de investigación Altos Estudios de Fronteras (ALEF - Unisimón)

Proceso de arbitraje doble ciego
Recepción: Octubre de 2017
Evaluación de propuesta de obra: Enero de 2018
Evaluación de contenidos: Marzo de 2018
Correcciones de autor: Mayo de 2018
Aprobación: Junio de 2018

INVESTIGACIÓN Y PRAXIS
EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Editores
Juan Pablo Salazar Torres - Yudith Liliana Contreras Santander
Jhon-Franklin Espinosa-Castro

Juan Pablo Salazar Torres - Yudith Liliana Contreras Santander - Miguel Ángel Vera
Elkin Gelves Almeida - Olga Lucy Rincón Leal - Mawency Vergel Ortega
Andrea Johana Aguilar Barreto - Pastor Ramírez Leal - Raul Prada Núñez
César Augusto Hernández Suárez - Gerson Adriano Rincón Álvarez - Jessica Paola Ortiz Leal
María Carolina Buitrago Contreras - José Joaquín Martínez - Lina María Urzola Muñoz
Maricela Paredes Pabón - Marisol Quintana González - Ángela Mora Zuluaga
Nazly Janine Alvernia Leal - Nidmar Torrealba Amaya - William Javier Vásquez Ávila
Jhon-Franklin Espinosa-Castro

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
BARRANQUILLA Y CÚCUTA - COLOMBIA | VIGILADA MINEDUCACIÓN
ACREDITACIÓN INSTITUCIONAL DE ALTA CALIDAD
Res. 23095, del MEN

Investigación y praxis en la enseñanza de las matemáticas / editores Juan Pablo Salazar Torres, Yudith Liliana Contreras Santander, Jhon-Franklin Espinosa-Castro; Miguel Ángel Vera [y otros 21] -- Barranquilla: Ediciones Universidad Simón Bolívar, 2018 --

282 páginas; tablas; 17 x 24 cm
ISBN: 978-958-5430-87-7

1. Matemáticas – Enseñanza – Investigaciones 2. Matemáticas – Educación secundaria I. Salazar Torres, Juan Pablo, compilador-autor II. Contreras Santander, Yudith Liliana, compilador-autor III. Espinosa Castro, Jhon Franklin, compilador-autor IV. Ángel Vera, Miguel V. Gélvez Almeida, Elkin VI. Rincón Leal, Olga Lucy VII. Vergel Ortega, Mawency VIII. Aguilar Barreto, Andrea Johana IX. Ramírez Leal, Pastor X. Prada Núñez, Raúl XI. Hernández Suárez, César Augusto XII. Rincón Álvarez, Gerson Adriano XIII. Ortiz Leal, Jessica Paola XIV. Buitrago Contreras, María Carolina XV. Martínez, José Joaquín XVI. Urzola Muñoz, Lina María XVII. Paredes Pabón, Maricela XVIII. Quintana González, Marisol XIX. Mora Zuluaga, Ángela XX. Alvernia Leal, Nazly Janine XXI. Torrealba Amaya, Nidmar XXII. Vásquez Ávila, William Javier XXIII. Título

510.7 I624 2018 Sistema de Clasificación Decimal Dewey 22ª edición

Universidad Simón Bolívar – Sistema de Bibliotecas

Carrera 54 No. 59-102
http://publicaciones.unisimonbolivar.edu.co/edicionesUSB/
dptopublicaciones@unisimonbolivar.edu.co
Barranquilla y Cúcuta - Colombia

Producción Editorial
Editorial Mejoras
Calle 58 No. 70-30
info@editorialmejoras.co
www.editorialmejoras.co
Barranquilla

Agosto 2018
Barranquilla

Made in Colombia

Cómo citar este libro:
Salazar Torres, J. P., Contreras Santander, Y. L., Ángel Vera, M., Gelvez Almeida, E., Rincón Leal, O. L., Vergel Ortega, M., . . . Prada Núñez, R. (2018). *Investigación y praxis en la enseñanza de las matemáticas*. Barranquilla: Ediciones Universidad Simón Bolívar.

Capítulo VIII

Obstáculos epistemológicos presentes en estudiantes de cálculo diferencial

Raúl Prada Núñez[1], César Augusto Hernández Suárez[2],
Andrea Johana Aguilar Barreto[3]

* Capítulo de libro resultado del proyecto de investigación "Concepción alrededor de los conceptos básicos del cálculo diferencial en estudiantes universitarios".

1 Facultad de Educación, Artes y Humanidades - Universidad Francisco de Paula Santander. Profesor Investigador de la Universidad Francisco de Paula Santander. Máster Universitario en Ingeniería de Análisis de Datos, Mejora de Procesos y Toma de Decisiones. Magíster en Matemáticas, mención educación matemática. Especialista en Estadística Aplicada. Licenciado en Matemáticas y Computación. Grupo de Investigación GIPEPP-UFPS. Grupo de Investigación GIPEPP.
raulprada@ufps.edu.co

2 Facultad de Educación, Artes y Humanidades - Universidad Francisco de Paula Santander. Profesor Investigador y lider del Grupo de Investigación en Pedagogía y Prácticas Pedagógicas (GIPEPP). Magíster en enseñanza de las ciencias básicas, mención Matemática. Especialista en Docencia en Matemática. Especialista en Computación para la Docencia. Especialista en Práctica Pedagógica Universitaria. Licenciado en Matemáticas y Computación. Grupo de Investigación en Pedagogía y Prácticas Pedagógicas (GIPEPP), Universidad Francisco de Paula Santander.
cesaraugusto@ufps.edu.co

3 Licenciada en Lengua Castellana, Universidad de Pamplona. Abogada, Universidad Libre. Administradora, ESAP. Doctora en Educación, UPEL. PhD (c), Innovación Educativa y TIC. Especialista en Orientación de la conducta, Universidad Francisco de Paula Santander. Especialista en Administración Educativa, UDES. Tutora pedagógica para asuntos de lenguaje y Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional; Docente investigador de la Universidad Simón Bolívar.
andreitajaguilar@hotmail.com

RESUMEN

Son muchas las investigaciones que se han realizado teniendo como objetivo la identificación de las dificultades que poseen los estudiantes en el proceso de aprendizaje de los diversos conceptos matemáticos. Algunas han resaltado que el proceso de enseñanza de los conocimientos matemáticos por parte de los docentes en la educación secundaria y media se ha limitado a una expresión minimalista de procesos algebraicos que en nada aportan al entendimiento y apropiación de estos conocimientos de origen abstracto. Los estudiantes matriculados en programas de ingeniería que ingresan a la universidad deben enfrentarse de inmediato a un curso de Cálculo Diferencial, que requiere de un estudiante competente en los pensamientos numérico, variacional y espacial. Este documento identifica los obstáculos epistemológicos que presentan los estudiantes de programas de la Facultad de Ingeniería al inicio de proceso del formación académica en la Universidad Francisco de Paula Santander de Cúcuta - UFPS; entendido el obstáculo epistemológico como un conocimiento anterior que impide la apropiación de un nuevo saber. Se diseñó un instrumento que incorpora una serie de actividades que utilizan diversos registros de representación semiótica tendientes a determinar el nivel de apropiación que poseen los estudiantes alrededor de conceptos como función real, límite, continuidad, derivada y problemas de optimización. De los principales hallazgos se resalta la presencia de una amplia gama de concepciones en todos los pensamientos y conceptos que interfieren en el proceso de entendimiento y aprehensión académica, desencadenando en altos índices de pérdida, cancelación y repitencia.

Palabras clave: obstáculos epistemológicos, función, límite, continuidad, derivada.

EPISTEMOLOGICAL OBSTACLES PRESENT IN STUDENTS OF DIFFERENTIAL CALCULUS

ABSTRACT

Many investigations have been carried out taking into account the goal of identifying the difficulties that students in the process of learning the various mathematical concepts. Some have provided the process of teaching mathematical knowledge by teachers in secondary and secondary education, has been limited to a minimalist expression of algebraic processes that in no way provided knowledge and appropriation of this knowledge of abstract origin. Students enrolled in engineering programs entering college must immediately face a Differential Calculus course, which requires a competent student in numerical, space and spatial thinking. This document identifies the epistemological obstacles that the students of the programs of the Faculty of Engineering present at the beginning of the process of academic formation in the SPUF; understood the epistemological obstacle as an earlier knowledge that prevents the appropriation of a new know. An instrument was designed that incorporates a series of activities that resemble semiotic representation registers that allow students to determine the level of appropriation that students possess in concepts such as real function, limit, continuity, derivative and optimization problems. The main findings highlight the presence of a wide range of concepts in all processes that interfere in the learning process and academic apprehension, triggering high rates of loss, cancellation and repetition.

Keywords: epistemological obstacles, function, limit, continuity, derivative.

INTRODUCCIÓN

Todo estudiante que ingresa al sistema de educación superior debe iniciar su formación académica superando como mínimo un curso de Matemáticas en programas de formación socio-humanista, y tres o más cursos en programas de Ingeniería, en el que se tratan diversos conceptos que ya han sido tratados en su formación secundaria y media vocacional; pero el haberlos tratado en cursos anteriores de colegio pareciera que en ningún momento les garantiza el entendimiento y la obtención de resultados favorables en la universidad, posiblemente debido a que el proceso de enseñanza se ha limitado a la realización de procesos mecánicos asociados con el desarrollo de competencias del pensamiento variacional, lo que se convierte tal como lo afirma Hitt (2003), en dificultad para poder comprender el cálculo sin haber desarrollado habilidades que le favorezcan la construcción de sus propios conceptos. Frente a esta dificultad se debe procurar la comprensión de los conceptos matemáticos, luego se esperaría que un adecuado proceso de enseñanza en el aula propenda por el uso y articulación coherente (libre de errores) de los diversos registros de representación semiótica.

Lo anterior coincide con el interés que han mostrado los investigadores en el campo de la educación matemática con respecto al escaso dominio que poseen los estudiantes alrededor de los conceptos matemáticos al finalizar su proceso de formación en educación media; evidencia de esto son los resultados obtenidos por Colombia en pruebas internacionales como por ejemplo el *Trend in International Mathematics and Science Study*-TIMSS o pruebas PISA, donde el promedio de los estudiantes del país ha estado dominado por la media general de la prueba. En este sentido, Palacios (2012) afirma que toda investigación que se oriente a la identificación de dificultades de aprendizaje para mejorar la calidad de la educación siempre será de interés prioritario, por tanto todas las acciones que se puedan realizar tendientes a identificar las dificultades que exhiben los estudiantes, a identificar las buenas o no tan buenas prácticas docentes, al análisis del proceso evaluativo, a la caracterización de los recursos didácticos utilizados en el aula por parte de los docentes, entre otros aspectos; todos aportan información valiosa tendiente a la transformación de las prácticas docentes y al mejoramiento del proceso enseñanza-aprendizaje.

Una pregunta a responder es ¿Cuáles factores intervienen en los procesos de enseñanza que mejoran el aprendizaje de los estudiantes? Para iniciar el abordaje de este tema se cita a Santos (1994) al explicar que el tipo de actividades que fomenta el docente en el aula de clase necesariamente influye en el tipo de aprovechamiento que los estudiantes evidencien en el desarrollo de procesos de entendimiento o resolución de problemas.

En muchas ocasiones –como lo menciona Hitt (2003)– el docente presenta en el aula ejemplos asociados a situaciones de la vida real para introducir los conceptos matemáticos, pero si dichos ejemplos no han sido bien diseñados como por ejemplo: la edad de un padre es equivalente al doble de la edad de su hijo aumentado en diez. El enunciado anterior propone una incoherencia lógica que no se ajusta a la realidad debido a que el estudiante puede razonar cuando el hijo tiene edad de cero años su papá tendría entonces 10 años.

Luego, este tipo de ejemplos que puede surgir de la necesidad del docente de presentar una situación en contexto en el aula (pero sin haberla preparado) seguramente desencadenarán en la apropiación limitada y posiblemente errónea en el estudiante. Por ello se recomienda la utilización de ejercicios muy bien pensados que no propicien inconsistencias para alcanzar el objetivo propuesto que es el de llevar a los estudiantes a un nivel más profundo de entendimiento del conocimiento donde evidencien el campo de aplicación de los conceptos en situaciones cotidianas.

Otro problema que se desprende de la incorporación de este tipo de situaciones no preparadas, es generar en el estudiante la insensibilidad a incoherencias y contradicciones lógicas al obtener un resultado. Con lo afirmado en este párrafo se desea hacer énfasis en el hecho de que la presencia de dificultades en el manejo de los conceptos matemáticos no recae solo en el estudiante y en sus capacidades, sino que el aprendizaje del estudiante termina siendo el producto de las dificultades conceptuales o las mismas concepciones presentes en los docentes que han orientado su proceso educativo.

REFERENTES TEÓRICOS E INVESTIGATIVOS

La actual investigación se fundamenta en el trabajo teórico expuesto por dos investigadores en el campo de la Educación Matemática; por una parte se cuenta con los trabajos de Artigue (1990) "*Epistemología y didáctica. Investigaciones en Didáctica de las Matemáticas*", Artigue (1995) "*Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*", y el trabajo desarrollado por Vergnaud (1990) "*La teoría de los campos conceptuales*". A continuación se presentan los elementos más relevantes de los trabajos en mención que se relacionan fuertemente con el fin del proceso investigativo.

En lo concerniente a la *teoría de los campos conceptuales,* Vergnaud (1990) afirma que es una teoría que estudia los procesos mentales implicados en el proceso de aprendizaje, que pretende proporcionar un marco que permita comprender las filiaciones y las rupturas entre conocimientos. La teoría de los campos conceptuales no es específica de las matemáticas, pero ha sido elaborada primeramente para dar cuenta de procesos de conceptualización progresiva de las estructuras aditivas, multiplicativas, relaciones número-espacio, y del álgebra.

Dos definiciones esenciales en la teoría de los campos conceptuales son concepto y esquema. Para que un concepto sea entendido y apropiado por el estudiante no puede ser reducido a su definición. Para que un concepto adquiera sentido en el estudiante se requiere de la implementación en el aula por parte del docente de una serie de situaciones didácticamente diseñadas con el fin de que los estudiantes vean en ellas un espacio de aplicación de ese saber. Este proceso demanda enfrentar al estudiante a varios tipos de situaciones, algunas para las que le resultan rutinarias, puesto que ya han sido abordadas con anterioridad y de las cuales se puede considerar competente para resolverlas. Por otra parte, están aquellas situaciones que le resultan novedosas, que lo obligan a reflexionar, a explorar alternativas de solución, que en algunos casos lo pueden llevar al éxito o en otros, al fracaso. El valor que aportan estas situaciones novedosas en el estudiante es que lo obligan a pensar antes de actuar, y sin importar si llega a la respuesta correcta o no, siempre le aportarán una experiencia de aprendizaje al estudiante.

Con lo mencionado en el párrafo anterior de los dos tipos de situaciones surge como elemento complementario el identificar el esquema utilizado por el estudiante en el momento de buscar la solución al problema propuesto. En el caso de las situaciones ya conocidas por el estudiante, el esquema adoptado resulta único y muy seguramente se ejecuta de forma automática sin ningún proceso de razonamiento previo. En cambio, cuando el estudiante se enfrenta a situaciones no rutinarias o novedosas, surge el reto de buscar una solución que seguramente demanda acomodar, separar o combinar varios esquemas ya conocidos. Vergnaud (1990) afirma que un esquema es una organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada. En los esquemas es donde se deben investigar los conocimientos en acto del sujeto, es decir, los elementos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operatoria.

El funcionamiento cognitivo del estudiante implica la realización de operaciones que se automatizan progresivamente (como por ejemplo el cambiar de signo cuando se cambia de miembro en una igualdad con el fin de aislar una variable) y de decisiones conscientes que permiten tener en cuenta valores particulares de las variables de la situación. La fiabilidad del esquema para el estudiante reposa en última instancia sobre el conocimiento que tiene, explícito o implícito, de las relaciones entre el algoritmo y las características del problema a resolver.

La automatización es evidentemente una de las manifestaciones más visibles del carácter invariante de la organización de la acción. Pero una serie de decisiones conscientes puede también constituir el objeto de una organización invariante para una clase de situaciones dadas. Por otra parte, la automatización no impide que el sujeto conserve el control de las condiciones bajo las cuales tal operación es apropiada o no. De hecho, las conductas en general reflejan una parte de automaticidad y una parte de decisión consciente.

Se puede llegar a pensar que los algoritmos son esquemas, o también que los esquemas son objetos del mismo tipo lógico que los algoritmos: les falta eventualmente la efectividad, es decir, la propiedad de lograr el fin con seguridad en un número finito de pasos. Los esquemas son frecuentemente eficaces, pero no siempre efectivos. Cuando un niño utiliza un esquema ineficaz para una cierta situación, la experiencia le conduce, bien a cambiar de esquema, bien a modificarlo.

Un esquema reposa siempre sobre una conceptualización supuesta que en algunos casos puede afectar el resultado de su aplicación sin ser errores derivados de su propia aplicación. Por ello la observación de los estudiantes, al momento de resolver problemas, el análisis de sus dudas y de sus errores, muestra que las conductas en situación abierta son igualmente estructuradas por los esquemas. Estos son tomados del vasto repertorio de esquemas conocidos y especialmente de los que están asociados a las clases de situaciones que parecen tener una semejanza con la situación propuesta.

Finalmente, las conductas que exhibe el estudiante al enfrentarse a una situación propuesta se apoyan en el conjunto de esquemas disponibles y ya conocidos; luego, no se puede teorizar sobre el funcionamiento cognitivo sin considerar la existencia de los obstáculos epistemológicos mencionados por Bachelard y Babini (1972). Para los autores, abordar la noción de obstáculos epistemológicos, cuando se buscan las condiciones psicológicas de los progresos científicos, permite la pronta convicción que estos están en términos de los obstáculos que debe plantear el problema del conocimiento científico. Y no se preocupa por considerar los obstáculos externos como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad del sentido y del espíritu humano: es dentro del acto mismo del conocimiento, íntimamente, que aparecen, por una clase de necesidad funcional, las lentitudes y los problemas. Aquí se muestran las causas de estancamiento, e incluso de regresión, descubriendo las causas de la inercia que se llamaran los *obstáculos epistemológicos*. El conocimiento de lo real es una luz que proyecta siempre algunas sombras. Ella no es inmediata y nunca plena. Las revelaciones de lo real son siempre recurrentes. Lo real no será jamás *aquello* que podamos creer pero esto es aquello que siempre debemos pensar. El pensamiento empírico es claro, sobre todo, cuando el aparato de razones ha estado puesto a punto. En correspondencia con un pasado de errores, se encuentra la verdad en un verdadero arrepentimiento intelectual. De hecho, conocemos, en contra de un conocimiento anterior, en destrucción de conocimientos mal hechos, en dominación dentro del espíritu mismo, que obstaculiza la espiritualización.

Posteriormente, Brousseau (1983), en la conferencia Internacional para la mejora de la enseñanza de la matemática-CIEAEM en *Louvain la Neuve*, propone –dentro de la noción de obstáculo– la manera de cambiar el significado del error mostrando que:

> El error y fracaso no tienen el papel simplificado que queremos a veces hacerles jugar. El error no es simplemente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como lo creemos de acuerdo a las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de ese tipo no son erráticos e imprevisibles, ellos son establecidos como obstáculos. Adicionalmente dentro del funcionamiento del maestro y del estudiante, el error se constituye como el sentido del conocimiento adquirido. (s.p.)

Dentro de lo expuesto, Brousseau (1983) hace referencia a tres tipos de orígenes diferentes de los obstáculos en el proceso de enseñanza de las matemáticas:

Un origen ontogenético correspondiente a los obstáculos unidos a las limitaciones de las capacidades cognitivas de los estudiantes comprometidos dentro del proceso de enseñanza, es decir, esta asociado con el desarrollo físico del estudiante.

Un origen didáctico para los obstáculos ligados a las opciones del sistema de enseñanza, es decir, está asociado con los recursos didácticos que el docente implementa en el proceso de enseñanza.

Un origen epistemológico para los obstáculos relacionados con la resistencia a un saber mal adaptado, es decir, corresponde a todas las limitaciones que afectan la capacidad que poseen los estudiantes para construir conocimiento real o empírico.

Dentro de la perspectiva que es la base de un aprendizaje por adaptación en un medio problemático, el objeto principal de la didáctica es justamente estudiar las condiciones que deben cumplir las situaciones o problemas propuestos al estudiante para favorecer la aparición, el funcionamiento y el resultado de esas concepciones sucesivas. Esto conduce a la noción de salto de información, que solo si es suficiente podrá, de hecho, bloquear los mecanismos de adaptación y de acomodación de las concepciones anteriores que llevan consigo la entrega en causa de un conocimiento-obstáculo.

Al mismo tiempo, se resalta la importancia para el didáctico del análisis epistemológico, la identificación de los obstáculos, dando la posibilidad de escoger, en medio de las dificultades que generalmente se encuentran por la enseñanza dentro del aprendizaje de tal o cual noción, aquellas que son realmente inevitables porque constituyen el desarrollo del conocimiento.

Para el investigador didáctico, una condición ya citada de ser un conocimiento es la existencia de un dominio de validez y de eficacia, de resistencia, y es dentro del análisis histórico de estas resistencias y dentro de los debates que les han vencido en donde se deben buscar los elementos que permitan identificar los obstáculos de los estudiantes, y sin buscar unir el estudio histórico con el estudio didáctico, buscar también los argumentos para construir las situaciones de enseñanza que permitirán su superación.

Pero la impresión de estos trabajos es que, aquello que funda alguna clase de obstáculos epistemológicos, es su aparición y su resistencia en la historia de los conceptos considerados, así como la observación de concepciones análogas en los estudiantes, más que la constancia de las resistencias a estas concepciones para los estudiantes actuales.

Esta condición es esencial: del hecho de la disparidad de contrarios que rigen los dos sistemas, el análisis histórico puede ayudar al didáctico dentro de su investigación de los nudos de resistencia del aprendizaje; él no puede en ningún caso, aportar a la investigación la prueba de la existencia de tal o cual obstáculo para los estudiantes actuales. Adicionalmente, como hallazgos de diversas investigaciones se puede constatar que los nudos actuales de resistencia severa corresponden, a menudo, con los puntos donde un obstáculo de origen epistemológico histórico interviene reforzado por un obstáculo de otro origen, que en particular es un obstáculo de origen didáctico.

Teniendo en cuenta las diferencias entre las condiciones de génesis histórica y escolar, parece razonable hacer la hipótesis de la existencia para la enseñanza actual de nudos de resistencia que funcionan como han funcionado los obstáculos epistemológicos dentro del desarrollo de las matemáticas, sin que sea posible por tanto el atribuirle históricamente el papel de obstáculo. Esto remite inevitablemente a la identificación de los obstáculos dentro de la historia o la enseñanza de tal o cual noción, a una identificación de los procesos productores de obstáculos en matemáticas.

Brousseau (1983), en su trabajo titulado *Los obstáculos epistemológicos y la didáctica de las Matemáticas*, retoma el análisis de los obstáculos como factor importante para el investigador en didáctica de las matemáticas, precisando que lo primero que debe hacer el investigador es identificar los errores que son recurrentes para verificar cómo ellos se agrupan alrededor de diversas concepciones; posteriormente, y mediante el estudio histórico de las matemáticas determinar los obstáculos que fueron surgiendo en su proceso evolutivo para finalmente, poder confrontar dichos obstáculos históricos con los hallados en sus unidades de estudio y poder así determinar su carácter de obstáculo epistemológico.

Duroux (1982) proporciona una serie de características que evidencian cuándo un investigador está frente a un obstáculo en el proceso de aprendizaje de sus estudiantes. Afirma que un obstáculo nunca debe ser visto como una falta de conocimiento, por el contrario, detrás de un obstáculo siempre hay un conocimiento que produce respuestas acertadas en cierto contexto específico, pero al cambiar las características de ese contexto de aplicación casi siempre desencadena en respuestas falsas. Ante esta ambivalencia de resultados, dicho conocimiento local (obstáculo) se resiste de manera obstinada a ser modificado a través de un nuevo saber que pierda esa condición de localidad funcional. Entonces se hace hincapié, más allá del aspecto del conocimiento y del reconocimiento histórico, sobre la necesidad de probar la resistencia actual de ese conocimiento así comprendido después de que lo se pueda considerar como la superación del obstáculo (última condición).

METODOLOGÍA

Para Arias (2012), el nivel de la investigación se refiere al grado de profundidad con que se aborda el fenómeno u objeto de estudio, para el presente ejercicio ubicada en el nivel de investigación descriptiva en la medición de variables independientes ya que se buscaba caracterizar las dificultades observadas en una población de individuos, resaltando en ellos aspectos como porcentajes de aciertos, desaciertos, actividades realizadas, herramientas utilizadas, entre otros.

El diseño de la investigación es la estrategia general que adopta el investigador para responder al problema planteado (Arias, 2012, p.26). Por ello esta investigación adopta el diseño de *campo* (Echevarria, 2005, p.31) ya que la información será recolectada directamente de la fuente primaria como lo son los estudiantes.

Con relación a la definición de la población se parte del marco referencial que está integrada por la totalidad de estudiantes matriculados en el curso de Cálculo Diferencial para el II semestre de 2016 de la Facultad de Ingenierías en la Universidad Francisco de Paula Santander. No se consideró la aplicación de un proceso de muestreo puesto que se deseaba explorar todas las opciones que ofrece la Facultad de Ingenierías.

En cuanto a los instrumentos utilizados se recurrieron a dos fuentes de información: a) fuentes secundarias a través de las consultas realizadas en la búsqueda de antecedentes así como en la revisión de documentos de historia de las matemáticas con el fin de evidenciar una lista de posibles dificultades de aprendizaje que se comportan como concepciones; b) fuentes primarias que consistieron en la conformación de un panel de docentes que han orientado el curso de Cálculo Diferencial por al menos dos años. A ellos se les consultó sobre las dificultades que presentaban los estudiantes al momento de enseñar y evaluar los conceptos básicos del Cálculo Diferencial.

Una vez se tenía la información de las fuentes mencionadas se procedió a construir dos instrumentos, uno para evaluar los temas de límite y continuidad, y otro, para el tema de derivación. Se recurrió a la utilización de diversos registros de representación semiótica en cada instrumento y cada uno de ellos estaba orientado a un aspecto específico necesario para entender como concepto. Finalmente, su aplicación se realizó en dos momentos diferentes del semestre, garantizando que al momento de cada aplicación ya los conceptos evaluados se hubiesen desarrollado al interior de sus cursos.

RESULTADOS

Para la presentación de la información derivada de la aplicación de cada prueba se utilizaron representaciones gráficas porcentuales acompañadas de una descripción detallada de los hallazgos en cada uno de los ítems de cada prueba. El total de estudiantes evaluados fue de 376 personas.

Prueba de límites y continuidad

Ítem 1. La temperatura en grados centígrados de un objeto en función del tiempo t, medido en horas, está dado por la siguiente función:

$$T(t)=\frac{20t^2+10t+25}{t^2+6t+5}$$

¿Qué temperatura tendrá el objeto con el paso indefinido del tiempo?

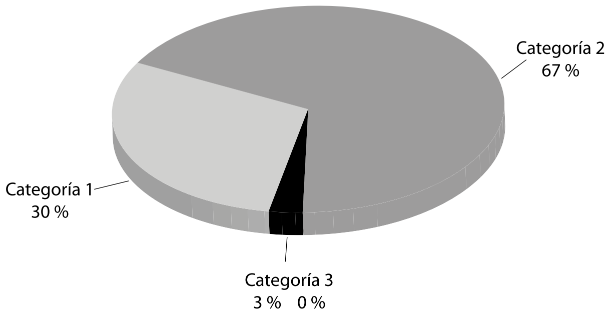


Figura 1
Resultados en términos de categorías de la situación problema
Fuente: Elaboración propia

El enunciado propone una situación en contexto con el fin de evaluar el límite en el infinito proporcionando la expresión algebraica asociada a la misma donde la variable independiente corresponde al tiempo, y la clave del enunciado se centra en la frase "*paso indefinido del tiempo*". De los resultados se destaca que ningún estudiante resolvió la situación de forma completa y correcta. Por ejemplo: los estudiantes agrupados en la Categoría 1 a partir de la expresión algebraica buscando determinar el límite a través del registro tabular, pero dado que no interpretaron de manera correcta la clave del ejercicio, evaluaron los cinco primeros números naturales; en la Categoría 2 se ubica el predominio del grupo, todos intentaron resolver el límite de forma algebraica, intentando factorizar cada término de la fracción (el denominador lo factorizan bien, pero fallan con la expresión del numerador) con el fin de eliminar factores comunes, pero no superan la fase algebraica del ejercicio; finalmente en la Categoría 3 se ubica el grupo de estudiantes que al leer el enunciado interpreta adecuadamente la clave del enunciado, realiza el procedimiento algebraico de límites en el infinito, pero al llegar al valor de 20 consideran que esa es la respuesta, sin realizar la formulación de una conclusión en donde se fusione el resultado numérico con el contexto de la situación propuesta.

Ítem 2. Calcule el siguiente límite de forma tabular:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{2}{x}+1\right)$$

								3							

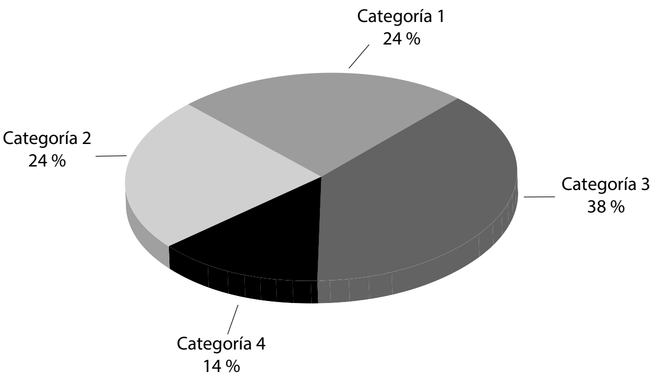


Figura 2
Resultados del cálculo del límite en forma tabular
Fuente: Eaboración propia

El enunciado propone determinar el límite de una función utilizando el registro tabular; de los procesos realizados se destaca: en la Categoría 1 se ubican aquellos estudiantes que construyen de forma inadecuada la tabla de valores ya que asignan solo valores enteros alrededor del 3 a la variable "X" desconociendo el concepto de límites laterales; en la Categoría 2 se encuentran los estudiantes que al evaluar el límite en la tabla asignan adecuadamente los valores de "X" acercándose tanto por izquierda como por derecha a partir de una distancia máxima de una unidad, finalizando con la conclusión del límite a partir de la igualdad de los límites laterales; en la Categoría 3 están los estudiantes que desconocieron la indicación de calcular el límite de forma tabular, a pesar de que se les proporciona la tabla para su diligenciamiento, resolviendo el límite de forma algebraica realizando el proceso de sustitución de la variable "X" por el valor de tendencia; finalmente en la Categoría 4 están todos los estudiantes que construyen adecuadamente la tabla para calcular el límite, evalúan correctamente los valores asignados considerando la condición de máximo acercamiento al valor analizado, pero no concluyen el valor del límite, es decir, realizan solo el proceso aritmético con los valores dados.

Ítem 3. Determine la existencia del límite:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2-3x-10}{x^2-4}$$

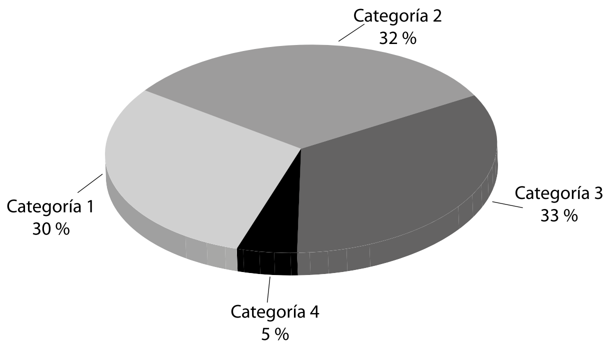


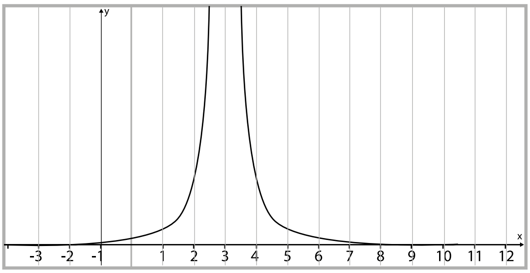
Figura 3
Resultados del cálculo del límite propuesto
Fuente: Elaboración propia

El enunciado propone determinar el límite de una función a partir del registro algebraico pero sin dar instrucciones del método a utilizar. De los resultados se generan cuatro categorías que se describen a continuación: en la Categoría 1 están los estudiantes que resolvieron el límite utilizando los registros tabular y algebraico, para concluir sobre la existencia del mismo a partir de la igualdad del resultado obtenido en ambos métodos; en la

Categoría 2 se ubicaron los estudiantes que intentaron resolver primero el límite de forma tabular pero como seleccionan valores inadecuados no pueden llegar a ninguna conclusión, entonces luego proceden a resolverlo de forma algebraica donde presentan dificultades en los procesos de descomposición factorial, para finalmente afirmar que el límite no existe; en la Categoría 3 están agrupados aquellos estudiantes que inicialmente intentan determinar el límite por medio del registro tabular pero fallan en el intento debido al uso inadecuado de valores, pero posteriormente resuelven de forma correcta el límite utilizando procesos algebraicos; por último en la Categoría 4 se encuentran los estudiantes que resolvieron de forma adecuada el límite utilizando el registro tabular, pero al intentar determinar la solución de forma algebraica, cometen errores en los procesos de descomposición factorial después de verificar la condición de indeterminación.

Ítem 4. Utilizando la información que le suministra la siguiente gráfica, determine:

$\lim x \to 3\, f(x)$



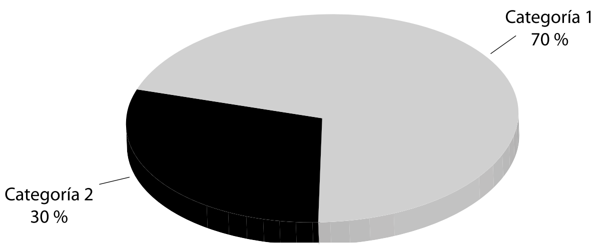


Figura 4
Interpretación del límite a partir de una gráfica
Fuente: Elaboración propia

El enunciado propone determinar el límite de una función a partir del registro gráfico sin proporcionar expresión algebraica alguna. En la Categoría 1 se ubican la mayoría de los estudiantes evaluados, quienes afirman que nunca les habían solicitado determinar la existencia de un límite a partir de una gráfica y sin ninguna ecuación; por ende afirman que no saben cómo resolver la situación propuesta; en la Categoría 2 están aquellos estudiantes que a pesar de afirmar nunca haber trabajado con situaciones de esta clase, aun sin total seguridad afirman que el límite de la función en el valor indicado es de infinito. Situación que entra en conflicto con la condición de unicidad del límite.

Ítem 5. Evalúe la continuidad de la siguiente función cuando

$t = 2$: $g(t) = \dfrac{t^3-8}{t-2}$

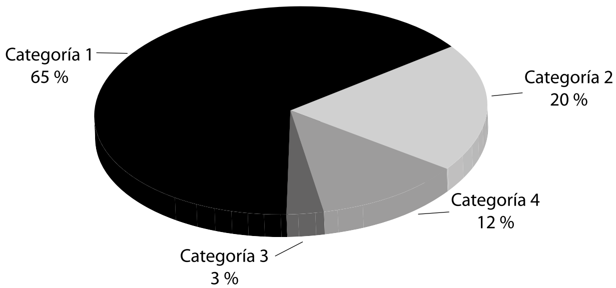
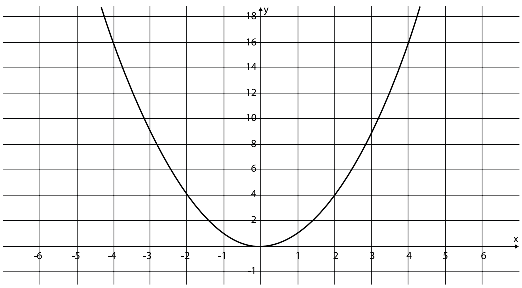


Figura 5
Resultados de la evaluación de continuidad de una función
Fuente: Elaboración propia

El enunciado propone determinar la continuidad de una función racional en un punto dado. En la Categoría 1 se agrupan los estudiantes que evalúan el valor dado en la función, al obtener la indeterminación % no avanzan más; en la Categoría 2 están los estudiantes que afirmaron desconocer totalmente el tema de continuidad ya que nunca les fue mencionado en las clases; la Categoría 3 la integran los estudiantes que después de evaluar el valor en la función afirman que se llega a una indeterminación que es propiciada por la existencia de un factor común entre el numerador y el denominador, por ello factoriza cada término, simplifica y con la expresión reducida calcula el límite en t=2, para finalmente afirmar que la función presenta una discontinuidad evitable o removible pero no propone una expresión algebraica que regule dicha condición de continuidad; finalmente en la Categoría 4 están los estudiantes que factorizan la expresión dada, luego determinan el límite de la función reducida en t=2, obtienen un valor y dan por terminada la solución, sin hacer comentario alguno sobre el proceso de continuidad.

Prueba de derivación

Ítem 1. A partir de la gráfica de la función $f(x)$, grafique su derivada $f'(x)$ en el mismo plano, justificando la respuesta.



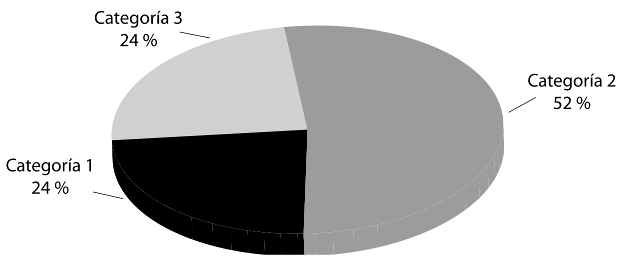


Figura 6
Resultados de la prueba de derivación
Fuente: Elaboración propia

El enunciado propone graficar la derivada de una función conocida dada en el registro gráfico. En la Categoría 1 se agrupan todos aquellos estudiantes que al ver la gráfica le asignan una expresión algebraica, dicha expresión luego la derivan correctamente, pero nunca la representan en el plano cartesiano; la Categoría 2 se identifica porque los estudiantes reconocen la gráfica y le sugieren una expresión algebraica, luego determinan de forma algebraica la derivada y con la función resultante determinan dos puntos, los ubican en el plano y los unen argumentando que la derivada es una línea recta; en la Categoría 3 están los estudiantes que afirman que la gráfica dada es una función de segundo grado, luego su derivada es otra función pero de grado uno y grafican cualquier línea recta desconociendo el signo de la pendiente que determina la orientación de la misma.

Ítem 2. Calcule la derivada de la siguiente función utilizando los teoremas de derivación que sean necesarios y simplifique la expresión obtenida.

$$g(x)=\frac{x^4-2x^2+5x+1}{x^4}$$

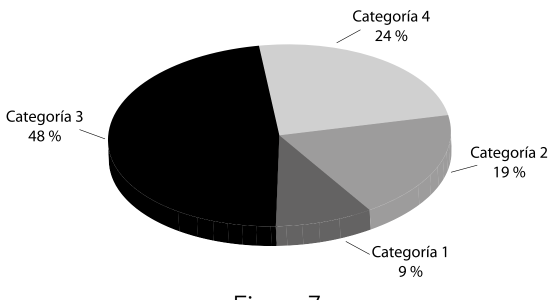


Figura 7
Resultados de la derivada de una función
Fuente: Elaboración propia

El enunciado propone determinar la derivada de una función racional expresada en el registro algebraico. En la Categoría 1 se ubican los estudiantes que determinan correctamente la derivada de la función utilizando la derivada del cociente, simplificando la expresión obtenida; la Categoría 2 agrupa a los estudiantes que proponen la derivada del cociente pero al simplificar la expresión cometen errores algebraicos; en la Categoría 3 se encuentran los estudiantes que proponen inadecuadamente la derivada del cociente (sumando y no restando) y de forma adicional cometen errores algebraicos en la simplificación de la expresión; finalmente, en la Categoría 4 se encuentran los estudiantes que se limitan a proponer la regla de derivación del cociente, reemplazan cada término de la expresión y dan por concluido el ejercicio.

Ítem 3. Un fabricante de cajas de cartón quiere elaborar cajas abiertas a partir de trozos rectangulares de cartón con dimensiones de 30 por 69 centímetros, cortando cuadrados en las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. Se desea determinar la longitud del lado de los cuadrados que se deben cortar de modo que la caja tenga el mayor volumen posible.

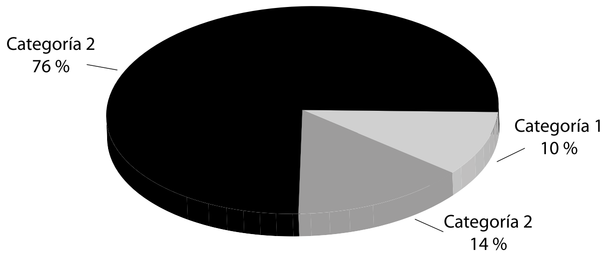


Figura 8
Resultados del proceso de optimización
Fuente: Elaboración propia

El enunciado propone una situación en contexto expresada en lenguaje cotidiano, que corresponde a un ejercicio clásico en todos los textos de Cálculo, cuando se aborda el tema de optimización.

De los resultados obtenidos se genera la siguiente agrupación de esquemas de solución: en la Categoría 1 se encuentran los estudiantes que realizan un dibujo de la situación propuesta con sus respectivos datos, pero no avanzan más; en la Categoría 2 están los estudiantes que proponen las expresiones algebraicas del área del rectángulo y la de volumen para una caja sin tapa, pero no realizan proceso alguno ni sustitución de valores conocidos; y en la Categoría 3 se ubican los estudiantes que argumentan no saber cómo resolver este tipo de situaciones ya que no formaron parte de los temas tratados.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

De la realización de esta investigación frente a los hallazgos generados en la ejecución de los objetivos específicos se plantean a manera de conclusión:

En cuanto al tema de continuidad de funciones se evidencia desconocimiento en los estudiantes en el proceso a seguir en cuanto la evaluación de la misma; se evidencia dificultad para determinar el tipo de discontinuidad que presenta una función, que sumado al desconocimiento de las funciones definidas por partes resulta inoperable la determinación de una adecuada solución.

En lo que respecta al tema de derivación se encuentra la fuerte presencia de la cultura del uso del registro algebraico como único medio de solución, pero que presenta dificultades propiciadas por las incompetencias algebraicas. El estudiante sigue desconociendo los diversos registros de representación, que sumado al escaso tiempo que los docentes le dedican a la solución de problemas de optimización, reduce el tema de derivación a su más mínima expresión de impacto conceptual.

Finalmente, de manera emergente es factible establecer frente al tema de límite de una función, abordado por el docente casi siempre de forma algebraica centrada en la simple sustitución del valor de tendencia en la expresión, concepción que resulta válida hasta el momento en que el estudiante se tiene que enfrentar a expresiones con límites factorizables; luego allí empiezan a surgir inconvenientes debido a la baja competencia que poseen los estudiantes en los procesos de descomposición factorial. Esta dificultad es evitable si al momento de explicar el tema el docente incorporara diversos registros de representación semiótica de forma que resulten complementarios unos con otros.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arias, F. (2012). *El proyecto de investigación: Introducción a la metodología científica* (6a ed.). Caracas: Episteme.

Artigue, M. (1990). Epistemología y didáctica. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, en M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bachelard, G. y Babini, J. (1972). *La formación del espíritu científico*. Buenos Aires: Siglo XXI.

Borbón, A. (2003). *Concepciones de profesores sobre varios conceptos del cálculo diferencial*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Brousseau, G. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Confrey, J. (1990). A revue of the research on student conceptions in mathematics, science and programming. *Revue on Research Education*, *16*, 3-55.

De la Rosa, A. (2003). *Errores e inconsistencias en la enseñanza del concepto de función en el docente: el grado de visualización*. Mosaicos Matemáticos N°11, México.

Dubinsky, Ed. y Harel, G. (Eds) (1992). *The concept of function: some aspects of epistemology and pedagogy*. MAA Notes, N° 25.

Duroux, A. (1982), *La valeur absolue: difficult´es majeures pour une notion mineure*, memoria de DEA, Publications de l'IREM, Burdeos.

Echavarria (2005). *La integración de métodos cualitativos y cuantitativos en la investigación psicogenetica y el problema de validez*. Dunken, Buenos Aires.

Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. En Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*, pp.14-152. Dor drecht: Kluwer Academic Publisher.

Janvier, C. (1987). Representation and Understanding: The notion of function as an example. En Janvier (ed) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Londres: LEA Publications.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del Cálculo. *XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers,* Morelia (México):Michoacán University San Nicolás de Hidalgo.

Palacios, M. (2012). Resultados pruebas TIMSS Colombia. Recuperado en: http://es.slideshare.net/marianopalaciosanzola/resultados-timss-2007

Quiroga, L. G., Cedeño, R. A. V. y Rivera, M. H. (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Ingenierías, 7*(24), 27.

Ruiz, L. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función*. Análisis epistemológico y didáctico. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Granada.

Santos, L. (1994). *La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Cuadernos de investigación. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN, México.

Tall, D. y Vinner, S. (1991). Concept imagen and concept definition with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Trends in International Mathematics and Sciences Study “TIMSS” (2007). *International Mathematics Report*. Formato pdf, p.34. http://nces.ed.gov/timss/

Vázquez, M. S., Astudillo, M. T. G. y Esteban, C. L. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(1), 71-86.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los Campos Conceptuales. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 10*(23), 133-170.

Cómo citar este capítulo:
Prada Núñez, R., Hernández Súarez, C. A. y Aguilar Barreto, A. (2018). Obstáculos epistemológicos presentes en estudiantes de cálculo diferencial. En J. P. Salazar Torres, Y. L. Contreras Santander, y J. F. Espinosa Castro (Edits.), *Investigación y praxis en la enseñanza de las matemáticas* (pp.203-229). Barranquilla: Ediciones Universidad Simón Bolívar.