

CAPÍTULO 1

# Diseño óptimo de un esquema de muestreo doble para el gráfico de control C

MANUEL CAMPUZANO HERNÁNDEZ<sup>1</sup>

ANDRÉS CARRIÓN GARCÍA<sup>2</sup>

RODRIGO BARBOSA CORREA<sup>3</sup>

- 
- 1 Universidad de Valencia, España.  
mjcampuzano@gmail.com
  - 2 Universidad Politécnica de Valencia, España.  
acarrion@eio.upv.es
  - 3 Universidad del Norte, Colombia.  
rbarbosa@uinorte.edu.co

## RESUMEN

En el control estadístico de procesos, la herramienta utilizada para monitorear el número de no conformidades por unidad es el gráfico de Shewhart C, este se basa en el supuesto de que la aparición de no conformidades en las muestras está bien modelada por una distribución de Poisson, y aunque es un gráfico fácil de usar, su capacidad para detectar pequeños cambios es baja, por lo que es necesario tomar muestras grandes, aumentando así los costos relacionados con el muestreo. Por lo anterior se propone la implementación de un esquema de muestreo doble para el gráfico de control C, además de derivar la expresión matemática adecuada para la evaluación exacta del ARL. Para el diseño de este gráfico de control se ha desarrollado un algoritmo genético multiobjetivo en R, dirigido a minimizar el número medio de muestras (ASN) y el riesgo beta, garantizando niveles fijos de riesgo alfa. Con el fin de ejemplificar la aplicación del nuevo DS-C desarrollado y evaluar la influencia de varios parámetros operativos, se realizan ejemplos numéricos y se dan las consideraciones relacionadas. Durante el procedimiento de optimización se han impuesto restricciones en ASN y en el ARL bajo control, variando parámetros de entrada, para finalmente comparar el rendimiento del DS-C con el del gráfico clásico de parámetros fijos FP-C.

**Palabras clave:** muestreo doble, gráfico de control C, ARL, algoritmos genéticos, frontera de Pareto.

## ABSTRACT

In statistical process control, the tool used to monitor the number of nonconformities is the Shewhart C chart. The conventional C chart assumes that the occurrence of nonconformities in samples is well modeled by a Poisson distribution,

and although is easy to use, the ability of the classic C chart to detect small shifts is low, thus is necessary take a big sample, increasing sampling-related costs. This article proposes the implementation of a double sampling scheme for C control chart, furthermore deriving the suitable mathematical expression for exact ARL evaluation. For design of this control chart a multi-objective genetic algorithm has been developed in R, aimed at the minimization of the average sample number (ASN) and beta risk, while warranting fixed levels for alpha risk. To exemplify the application of the developed new DS-C and to evaluate on the influence of several operating parameters, numerical examples are carried out and the related considerations are given. During the optimization procedure constrains have been imposed on the in-control ASN and on the in control ARL, varying some input parameters. Finally, comparing the performance of the DS-C with the classic fixed parameters FP-C chart.

**Keywords:** double sampling, C charts, ARL, genetic algorithms, Pareto front.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los procesos estadísticos para la administración de la calidad en las organizaciones constituyen una gama de esfuerzos por lograr grandes niveles de productividad; una empresa es un sistema compuesto por gran cantidad de procesos interrelacionados entre sí trabajando juntos por un fin en común. Es estrictamente necesario conocer a fondo un proceso productivo y lograr establecer variables medibles en su desarrollo para poder controlarlo.

El monitoreo de procesos productivos es un área esencial del control estadístico de la calidad; su alcance va desde un

diagnóstico de los procesos hasta la determinación de las causas más certeras que producen las indeseadas no conformidades. Cada día, es mayor la inversión realizada en el desarrollo de estas metodologías de manejo dentro de las empresas, arrojando resultados considerablemente beneficiosos, que procuran la estandarización de los procesos para el establecimiento de un control más eficiente.

La gráfica de control convencional de Shewhart C es la herramienta estadística más utilizada para monitorear el número total de no conformidades en una muestra. Este gráfico se basa en el supuesto que la aparición de no conformidades está bien modelada por una distribución de Poisson. Considere que las muestras con  $n$  unidades se toman en una inspección del producto en intervalos de tiempo fijos. En la mayoría de los casos, la muestra para inspección puede ser una sola unidad de producto, aunque esto no es necesariamente siempre así. Como el tamaño muestral se considera constante, el número total de no conformidades se representa en el gráfico. Un punto por fuera de los límites de control preestablecidos se interpreta como una señal fuera de control (Montgomery, 2007).

La capacidad del clásico gráfico C para detectar pequeños cambios es baja, por lo que es necesario tomar muestras grandes, lo que incrementa los costos relacionados con el muestreo. Con el tiempo, se han desarrollado diferentes enfoques y propuestas para mejorar el rendimiento de los clásicos gráficos de control de Shewhart, y la carta de control C no ha sido la excepción. Diferentes modelos de control, incluyendo esquemas de control adaptativos tales como los de Intervalo de Muestreo Variable (VSI), Tamaño de Muestra Variable (VSS), Tamaño de Muestra e Intervalo Variable (VSSI), en el que se permite a todos los

parámetros de la carta de control cambiar de forma adaptativa. Se ha demostrado que estos gráficos de control adaptativo son más eficaces que los gráficos de control de parámetros fijos en la detección de cambios pequeños a moderados en los procesos bajo control.

Los gráficos de control adaptativos para atributos fueron inicialmente propuestos por Vaughan (1992), años más tarde Epprecht & Costa (2001) y Epprecht, Costa & Mendes (2003) desarrollaron y optimizaron el gráfico VSS para los gráficos de control NP y C. Así mismo, Wu & Luo (2004), trabajaron con el fin de optimizar estos gráficos de control adaptativos.

El primer gráfico de control de muestreo doble fue propuesto por Croasdale (1974) para los gráficos de control por variables. En este la información de la primera y la segunda unidad muestral se evalúa por separado, y la decisión se hace solo sobre la base de la segunda muestra. Daudin (1992) propuso un diagrama de control del DS que utiliza la información de ambas muestras en la segunda etapa; este procedimiento ofrece un mejor rendimiento que Croasdales DS, sin aumentar el tamaño de la muestra. Para el diseño de los límites del cuadro de control, Daudins DS se optimiza con respecto a ASS. En lugar de minimizar el tamaño esperado de la muestra, Irianto & Shinozaki (1998) maximizaron la potencia de la carta de control para determinar los límites del gráfico de control. He, Grigoryan & Sigh (2002) y Costa & Claro (2008) han hecho un mayor desarrollo de los gráficos de control de DS para las variables.

Últimamente se han realizado investigaciones para mejorar la eficacia de los gráficos de control por atributos, Wu, Luo & Zhang (2006) desarrollaron un algoritmo para el diseño

óptimo del gráfico de control NP con reducción, El objetivo era maximizar la eficacia del gráfico NP, manteniendo tanto la tasa de falsas alarmas en un nivel especificado y como su simplicidad para la fácil comprensión y operación. El algoritmo de optimización puede aplicarse a una inspección al 100 %, así como a una inspección general del muestreo aleatorio. La efectividad del gráfico se mide por el tiempo promedio hasta que hay una señal fuera de control (ATS) bajo el modo de estado estacionario. Wu & Wang (2007) propusieron un gráfico NP con una función de inspección doble. La primera inspección determina el estado del proceso de acuerdo con el número de unidades no conformes encontradas en una muestra; y la segunda inspección toma una decisión basada en la ubicación de una unidad no conforme particular en la muestra. El esquema de inspección doble hace que el  $ARL_0$  en control sea muy cercano a un valor especificado y con el proceso fuera de control la longitud media de corrida  $ARL_1$  sea bastante pequeña; el gráfico propuesto verifica la ubicación de un elemento no conforme en particular en una muestra. Pérez, Carrión, Jabaloyes & Aparisi (2010) propusieron el gráfico DS-U para mejorar el rendimiento del gráfico u estándar. El gráfico DS-U se basa en el esquema de Daudin (1992) y el enfoque VSS, donde se utilizan algoritmos genéticos para optimizar el gráfico.

Por último, De Araújo, Epprecht & De Magalhaes (2011) propusieron un doble muestreo DS para los gráficos NP; este es otro esquema utilizado para la mejora del rendimiento de los gráficos de control de Shewhart NP, sin incrementar el número promedio de unidades inspeccionadas por unidad de tiempo. Durante la primera etapa, se inspeccionan uno o más artículos de la muestra y, dependiendo de los resultados, se interrumpe el muestreo o se pasa a la segunda etapa, donde se inspeccionan los elementos de muestra restantes. Recientemente, Chong, Khoo & Castagliola

(2014) desarrollaron un gráfico de control sintético de muestreo doble DS NP que comprende dos subgráficos, el DS NP y subgráficos de longitud de corrida conformes (CRL). El gráfico DS NP sintético integra el gráfico DS NP propuesto por De Araújo, Epprecht & De Magalhaes (2011) y el gráfico CRL, ofreciendo una notable mejora en el rendimiento de  $ARL_1$  en comparación con el NP sintético y el DS NP.

El propósito de este capítulo es optimizar un nuevo esquema de muestreo doble para el gráfico DS-C, como una analogía con el plan de muestreo doble. Como se demostrará, este esquema ofrece una mejor eficiencia estadística (en términos de ARL) que los gráficos C clásicos y otras alternativas más sofisticadas, sin un mayor coste de muestreo. Alternativamente, el esquema puede usarse para reducir el coste de muestreo sin reducir la eficiencia estadística.

## 2. GRÁFICO DE CONTROL C DE PARÁMETROS FIJOS (FP-C)

Un producto no conforme es una unidad producida que no satisface una o más especificaciones para ese producto; cada punto específico en el que una especificación no se satisface produce un defecto o no conformidad (Riquelme, Gatica & Orozco, 2015). En consecuencia, un elemento no conforme contendrá al menos una no conformidad.

El gráfico C es la herramienta estadística más utilizada para monitorear el número total de no conformidades en una unidad de producción seleccionada a partir de una muestra. Este gráfico se basa en el supuesto de que la aparición de no conformidades en las muestras está bien modelada por una distribución de Poisson. Esencialmente, esto requiere que el número de oportunidades o ubicaciones potenciales para las no conformidades

sea infinitamente grande y que la probabilidad de ocurrencia en cualquier ubicación sea pequeña y constante. Además, la unidad de inspección debe ser la misma para cada muestra. Es decir, cada unidad de inspección debe representar siempre un área de oportunidad idéntica para la ocurrencia de no conformidades. Además, podemos contar no conformidades de diferentes tipos en una unidad, siempre y cuando se cumplan las condiciones anteriores para cada una de ellas.

Para construir el gráfico de control C se empieza por tomar  $k$  muestras  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , de  $n_i$  unidades cada una, i.e.  $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{in_i})$ . Sea  $\lambda$  el número esperado de no conformidades en cada una de las muestras.

- Para cada muestra se calcula el número  $\lambda_{ij}$  de no conformidades en una unidad  $X_{ij}$ ,  $J = 1, \dots, n_i$
- Si denotamos  $C_i$  al número de no conformidades totales en la muestra  $i$ -ésima, entonces:

$$c_i = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} \quad (1)$$

- Por otra parte, si denotamos  $\lambda_i$  al valor esperado de no conformidades en la muestra  $i$ -ésima, se tiene que:

$$\lambda_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} \quad (2)$$

Se puede observar que  $\lambda_i = \frac{1}{n_i} c_i$ , i.e.:  $c_i = \lambda_i n_i$ .

- Notar además  $E[c_i] = E[n_i \lambda_i] = n_i E[\lambda_i] = n_i \lambda$
- Como se mencionó anteriormente, se supone que el número de no conformidades (sucesos poco factibles) en una población grande sigue una distribución de Poisson, esto es que  $c_i \approx Po(n_i \lambda)$  y se cumplirá que  $c_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N(n_i \lambda, \sqrt{n_i \lambda})$ .
- Según el modelo de Shewhart se calculan los límites de control C a continuación:

$$ULC = n_i \lambda + 3\sqrt{n_i \lambda} \quad (3)$$

$$CL = n_i \lambda \quad (4)$$

$$LCL = n_i \lambda - 3\sqrt{n_i \lambda} \quad (5)$$

- Si  $\lambda$  es desconocida, se puede estimar a partir de k muestras tomadas (no inferior a 25) cuando se considera que el proceso está bajo control.

### 3. GRÁFICO DE CONTROL C DE DOBLE MUESTREO (DS-C)

Supongamos un proceso en el cual el número de no conformidades por muestra sigue una distribución de Poisson, con un promedio histórico de  $\lambda_0$ , cuando el proceso está en control. Si están presentes causas asignables de variación implicaría que el proceso está llegando a ser de menor calidad, hay un aumento en el número de las no conformidades. Solo se considerará este caso de interés y el gráfico se define sin límite de control inferior.

El gráfico DS-C propuesto utiliza cinco parámetros: el tamaño de la primera submuestra ( $n_1$ ); el número de aceptación de la primera muestra, correspondiente a un límite de advertencia ( $WL$ ); el número de rechazo para la primera muestra ( $UCL_1$ ); el tamaño

de la segunda submuestra ( $n_2$ ); y el número de aceptación para la segunda etapa ( $UCL_2$ ).

El siguiente es el procedimiento propuesto:

1. En el momento de la inspección, se extrae una muestra global de tamaño ( $n_1 + n_2$ ) del proceso.
2. Se analiza la primera submuestra de  $n_1$  unidades, buscando las no conformidades. Sea  $X_1$  el número de no conformidades encontradas en esta submuestra. En este caso la decisión depende de  $X_1$ :
  - 2.1. Si  $X_1 < WL$ , el proceso se considera bajo control y el esquema de control continúa operando. La segunda submuestra no necesita ser analizada.
  - 2.2. Si  $X_1 > UCL_1$ , se supone que el proceso está fuera de control y debe tomarse una acción correctiva. La segunda submuestra no necesita ser analizada.
3. Si  $WL < X_1 < UCL_1$ , la segunda submuestra de  $n_2$  unidades se analiza inmediatamente, buscando no conformidades. Sea  $X_2$  el número de no conformidades encontradas en esta submuestra. En este caso la decisión depende de la suma de  $X_1$  y  $X_2$ :
  - 3.1. Si  $(X_1 + X_2) < UCL_2$ , el proceso se considera en control y el esquema de control continúa operando.
  - 3.2. Si  $(X_1 + X_2) > UCL_2$ , el proceso se considera fuera de control y una acción correctiva debe ser tomada.
4. En intervalos de muestreo prefijados (cada hora, por ejemplo), regrese a la fase 1 del esquema DS-C y tome una nueva muestra de tamaño ( $n_1 + n_2$ ).

La ubicación de los límites WL,  $UCL_1$  y  $UCL_2$  no puede coincidir con números enteros. Debido a esto las reglas de decisión no consideraron la igualdad. Para el diseño de la carta DS-C es recomendable ubicar estos límites en el punto medio de los dos enteros consecutivos adecuados. La Figura 1 representa el esquema de control gráfico para DS-C y los puntos se trazan de acuerdo con las situaciones A, B, C y D, descritas anteriormente.

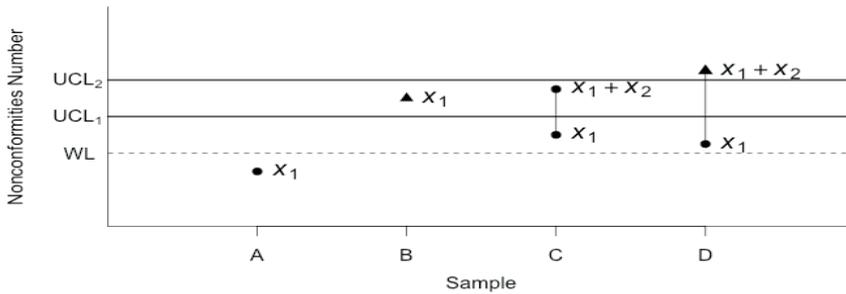


Figura 1  
Esquema del gráfico de control DS-C

Fuente: Elaboración propia

### 3.1 Medidas de desempeño del gráfico de control DS-C

La eficacia de un gráfico de control puede determinarse por su velocidad en la detección de un cambio o perturbación del proceso que aumenta el número medio de no conformidades. Esta velocidad puede ser medida por el ARL. El esquema DS-C tiene como objetivo acelerar la detección de aumentos en el número medio de no conformidades, sin incrementar la tasa de inspecciones o la tasa de falsas alarmas.

Por lo general, el proceso comienza en control  $\lambda = \lambda_0$  y en algún momento una causa asignable aumenta el número de no conformidades por unidad a  $\lambda_1$ . Se asumió para el esquema desarrollado que el proceso comienza bajo control. También se asumió que el aumento de  $\lambda$  no ocurre durante la extracción de una muestra, sino entre tiempos de muestreo. Por último, se supone que las unidades producidas son independientes, y una vez que el proceso está en el estado fuera de control, permanece en esta condición, con ( $\lambda = \lambda_1$ ), hasta que haya una intervención para devolverlo al estado bajo control ( $\lambda = \lambda_0$ ).

Cuando un proceso está bajo control, las falsas alarmas deben ser tan pocas como sea posible para asegurar la credibilidad del gráfico de control. La tasa de falsas alarmas se calcula con la longitud de ejecución promedio ( $ARL_0$ ). El  $ARL_0$  es el valor medio del número de muestras tomadas antes de que aparezca una señal fuera de control. La deducción es simple, y está dada por:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (6)$$

Donde  $\alpha$  es la probabilidad de falsa alarma, y está dada por:

$$\alpha = 1 - P(x_1 < WL \mid \lambda = \lambda_0) \quad (7)$$

$$+ \sum_{i=[WL]+1}^{[ULC]-1} P(x_1 = i \mid \lambda = \lambda_0) * P(x_2 < ULC_2 - i \mid \lambda = \lambda_0)$$

Donde:

$$P(x_1) = \frac{e^{-\lambda_0 n_1} * (\lambda_0 n_1)^{x_1}}{x_1!} \quad (8)$$

$$P(x_1) = \frac{e^{-\lambda_0 n_2} * (\lambda_0 n_2)^{x_2}}{x_2!} \quad (9)$$

Por el contrario, cuando un proceso está fuera de control, el número medio de muestras tomadas hasta encontrar una señal fuera de control debe ser pequeño para proporcionar una detección rápida del cambio de proceso. Este número medio se denomina  $ARL_1$  y bajo la suposición de que el aumento de  $\lambda$  no se produce durante la extracción de una muestra se tiene la siguiente expresión:

$$ARL_1 = \frac{1}{1-\beta} \quad (10)$$

Donde  $(1-\beta)$  es la probabilidad de detectar un corrimiento específico. Este valor se conoce como potencia de prueba y se puede obtener mediante:

$$\beta = P(x_1 < WL \mid \lambda = \lambda_1) \quad (11)$$

$$+ \sum_{i=[WL]+1}^{[UCL]-1} P(x_1 = i \mid \lambda = \lambda_1) * P(x_2 < UCL_2 - i \mid \lambda = \lambda_1)$$

Donde:  $P(x_1) = \frac{e^{-\lambda_1 n_1} * (\lambda_1 n_1)^{x_1}}{x_1!} \quad (12)$

$$P(x_1) = \frac{e^{-\lambda_1 n_2} * (\lambda_1 n_2)^{x_2}}{x_2!} \quad (13)$$

El tamaño medio de la muestra (ASS) del gráfico DS-C es una función del número real de no conformidades por muestra  $\lambda$ , y está dado por:

$$ASS = n_1 + n_2 * [P(WL < x_1 < UCL_1 | \lambda = \lambda_0)] \quad (14)$$

Donde  $[P(WL < x_1 < UCL_1 | \lambda = \lambda_0)]$  es la probabilidad de analizar la segunda muestra.

### 3.2 Diseño óptimo del gráfico de control DS-C

Optimizar el rendimiento del gráfico de control DS-C es equivalente a encontrar el conjunto de parámetros de diseño que garantizan que en la operación las probabilidades de riesgo de tipo I y II ( $\alpha; \beta$ ) son lo más cercanas posible a los niveles objetivo ( $\alpha^*; \beta^*$ ) establecido por el operador del proceso. Simultáneamente, los costos de inspección se controlan a través de la minimización del ASS.

Este problema de optimización puede considerarse como un problema biobjetivo en el que:

Dado ( $\alpha^*; \beta^*; N; \lambda_0; \lambda_1$ ), es deseable encontrar los valores de los parámetros ( $n_1; n_2; WL; UCL_1; UCL_2$ ) que minimizan:

$$\min: Z_1 = [(\alpha - \alpha^*)^2 + (\beta - \beta^*)^2] \quad (15)$$

$$\min: Z_2 = ASS \quad (16)$$

Sujeto a las siguientes restricciones en sus parámetros:

$$WL \geq 0,5 \quad (17)$$

$$UCL_1 - WL \geq 1 \quad (18)$$

$$UCL_2 - UCL_1 \geq 0 \quad (19)$$

Las restricciones anteriores son necesarias para garantizar el funcionamiento del gráfico de control y sus reglas de decisión.

Además, el operador puede localizar un conjunto de restricciones que limitan el rango de búsqueda de los tamaños de muestra ( $n_1$ ;  $n_2$ ) y su valor medio (ASS), adaptándolos a las condiciones específicas del proceso, tales como las limitaciones de la conformación de la muestra y los costos de muestreo.

$$n_{1.min} \leq n_1 \leq n_{1.max} \quad (20)$$

$$n_{2.min} \leq n_2 \leq n_{2.max} \quad (21)$$

$$ASS \leq N \quad (22)$$

Hoy en día existen diferentes alternativas para resolver problemas multiobjetivos. Varios métodos han sido estudiados por autores como Fonseca & Fleming (1998); De Toro, Ortega, Fernández & Díaz (2002); Konak, Coit & Smith (2006). Métodos como el uso de ponderación multiobjetivo o una función de utilidad puede reducir el problema multiobjetivo a una optimización escalar, pero implican la selección de la preferencia entre los objetivos. Con el fin de ofrecer alternativas atractivas para el DS-C, se aplica en este estudio el enfoque del frente de Pareto, que comúnmente se utiliza para resolver la optimización multiobjetivo con conflictos entre las funciones objetivos. El frente de Pareto es un conjunto de soluciones para el caso multiobjetivo, utilizado donde la mejora de una de las funciones requiere algún sacrificio en otros objetivos, manteniendo al mismo tiempo la solución óptima global.

De las ecuaciones (7 a 14) se puede deducir que la expresión matemática de los riesgos y ASS no corresponden a funciones lineales, por lo que el uso de herramientas de resolución analítica y exacta puede ser una tarea muy difícil. En las últimas décadas ha sido frecuente el uso del algoritmo genético para obtener una solución para este tipo de problemas.

Los algoritmos genéticos introducidos e investigados por Holland (1992) son una familia de modelos computacionales inspirados en la evolución. Estos algoritmos codifican una solución potencial a un problema específico en un cromosoma simple como la estructura de datos, y aplican operadores de recombinación a estas estructuras de tal manera que preservan información crítica (Whitley, 1994).

En este capítulo se propone la implementación de un algoritmo genético para la búsqueda de los parámetros óptimos de diseño. Para su implementación, hemos ajustado las funciones incorporadas en la biblioteca de R Algoritmos de Optimización de Criterios Múltiples y Funciones Relacionadas, MCO. El algoritmo NSGAll desarrollado por Deb, Pratap, Agarwal & Meyarivan (2002) minimiza una función multidimensional para aproximar su frente de Pareto y su conjunto de Pareto.

Teniendo en cuenta que la función objetivo 1 (ecuación 15), permite al profesional definir el rendimiento deseado del gráfico bajo control y fuera de control. Esto es posible mediante la fijación  $\alpha^*$  y  $\beta^*$ , lo que es equivalente a definir  $ARL_0$  y  $ARL_1$  como se muestra en las ecuaciones (6) y (10).

Alternativamente, el operador puede estar interesado en obtener el mejor rendimiento de la tabla de control cuando se enfrenta a

un cambio en el proceso, garantizando que bajo control  $ARL_0 = ARL_0^*$ , donde  $ARL_0^*$  corresponde al ARL deseado por el controlador, debiendo definir  $\alpha^* = 1/ARL_0^*$  y  $\beta^* = 0$ .

### 3.3 Algoritmo genético (NSGA-II)

Normalmente, las metodologías de optimización se concentran en la adecuación de un conjunto de elementos de manera que se mejore el resultado dado por una función objetivo. Sin embargo, los problemas reales involucran otra serie de objetivos que pueden ser de tanto interés como lo que se optimizó, y también ser tan relevantes y conflictivos que harían inviable la solución obtenida. La optimización multiobjetivo basada en técnicas evolutivas es una meta heurística que surgió con el fin de resolver este tipo de problemas, caracterizada por ser capaz de obtener un conjunto de soluciones, con los mejores compromisos entre los objetivos optimizados (frente óptimo de Pareto).

Los algoritmos multiobjetivos requieren para su desarrollo métodos matemáticos de optimización sobre una población de soluciones, por lo que se ha encontrado en los algoritmos genéticos una propuesta firme, dadas sus características de diversidad y confiabilidad.

NSGA (*Non-Dominated Sorting in Genetic Algorithms*) es un popular algoritmo genético basado en la no dominación para la optimización multiobjetivo. Es un algoritmo muy efectivo, pero ha sido ampliamente cuestionado por su complejidad computacional y falta de elitismo. Se desarrolló una versión modificada, por Deb, Pratap, Agarwal & Meyerivan (2002) el NSGA-II, que tiene un mejor algoritmo de clasificación, incorpora el elitismo y ningún parámetro de uso compartido debe ser elegido *a priori*.

NSGA-II es clasificado como de tipo elitista, ya que incorpora un mecanismo de preservación de las soluciones dominantes a través de varias generaciones de un algoritmo genético. El proceso se inicia a partir de un conjunto de tamaño  $N$  de soluciones (padres) obtenidas al azar o a través de un constructivo suave. Las siguientes generaciones son determinadas usando mecanismos modificados de selección, cruzamiento y mutación definidos por el algoritmo genético clásico.

### ***3.3.1 Descripción general algoritmo genético (NSGA-II)***

La población se inicializa como de costumbre; una vez que es inicializada, se clasifica según la no-dominación en cada frente. El primero es completamente no dominante en la población actual y el segundo frente está dominado por los individuos en el primer frente solamente y va así sucesivamente. A cada individuo en cada frente se les asignan valores de rango (fitness) o se basan en el espacio al que pertenecen. A los individuos en el primer frente se les dan un valor de fitness de 1 y a los individuos en el segundo se le asignan el valor fitness de 2 y así sucesivamente.

Además del valor fitness, se calcula un nuevo parámetro llamado *distancia de aglomeración* para cada individuo; esta es una medida de lo cerca que está un individuo de sus vecinos. Una gran distancia media de aglomeración dará como resultado una mejor diversidad en la población.

Los padres se seleccionan de la población mediante torneos binarios basados en la distancia entre el rango y el hacinamiento. Un individuo es seleccionado si en el rango es menor que el otro o si la distancia de aglomeración es mayor que el otro y se compara solo si el rango para ambos individuos es el mismo. La población seleccionada genera descendientes de los operadores de cruce y

mutación, los cuales serán discutidos en detalle en una sección posterior.

La población y los descendientes actuales se clasifican de nuevo basándose en la no-dominación y solo se seleccionan los mejores  $N$  individuos, donde  $N$  es el tamaño de la población. La selección se basa en el rango y la distancia de aglomeración en el último frente.

#### 4. COMPARACIÓN DEL GRÁFICO DS-C CON EL GRÁFICO DE CONTROL DE PARÁMETROS FIJOS (FP-C)

Con el fin de comparar el rendimiento del gráfico de control DS-C y la utilidad que su aplicación puede tener en contraste con el uso de un gráfico tradicional de parámetros fijos (FP-C), se evalúa el  $(ARL_c)$  de cada esquema.

Para la comparación, el tamaño de la muestra  $n$  se considera unitario ( $n = 1$ ) sin pérdida de generalidad (esto corresponde a adoptar el tamaño de la muestra como unidad de inspección y el intervalo de muestreo como unidad de tiempo). Cuando el proceso está bajo control, el número medio de no conformidades será  $\lambda_0$ .

Debido a su naturaleza discreta, el esquema de parámetro fijo (FP-C) presenta valores limitados para  $ARL_0$ , que dependen del tamaño de la muestra y la ubicación del límite de control superior. En cambio, el esquema DS-C tiene un mayor número de parámetros de diseño y presenta más flexibilidad con respecto a las condiciones  $ARL_0$  que es capaz de cumplir.

Para una comparación correcta entre los diferentes esquemas de control, se requiere que su rendimiento bajo control sea el mismo. Para ello, se encuentra el gráfico de control (FP-C) con

$ARL_0$  más cercano al  $ARL_0^{obj}$ , donde  $ARL_0^{obj}$  es una condición deseada para el profesional. Para esta comparación se ha considerado el  $ARL_0^{obj} = 370,4$ ; correspondiente al usual  $\alpha = 0,0027$ . El valor  $ARL_0$  encontrado para el gráfico de control FP-C ha sido la referencia para el diseño del gráfico de control DS-C. Esta estrategia de comparación fue la misma utilizada por Epprecht *et al.*, (2003), así como los valores considerados para  $\lambda_0$  y  $\gamma^*$ . Los valores considerados para los parámetros de entrada fueron los siguientes:  $\lambda_0 = 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 3,0; 4,0$  y  $\gamma = 1,5; 2,0; 3,0$ .

La Tabla 1 presenta los parámetros de diseño obtenidos para los dos gráficos de control (FP-C y DS-C), bajo las condiciones, y los correspondientes  $ARL_0$  y  $ARL_1$ . Con el fin de garantizar que la comparación de rendimiento entre el gráfico DS-C y el gráfico FP-C se lleva a cabo bajo condiciones lógicas de producción se han impuesto las mismas restricciones empleadas por Epprecht *et al.*, (2003) en su proceso de optimización para limitar el rango de variación de los tamaños de muestra  $n_1$  y  $n_2$  como se indica en las ecuaciones 20 y 21. Las restricciones para los tamaños de muestra son:  $0,2 \leq n_1 \leq 0,8$  y  $n_2 \leq 5$ . Además, se adiciona una restricción para el tamaño promedio de muestra (eq 22) así:  $ASS \leq 1$ , por lo que el objetivo de la comparación se centra en evaluar la reducción en  $ARL_1$ .

El indicador  $\%ARL_1^{red}$ , que se incluye en la columna 11 de la Tabla 1, evalúa el porcentaje de reducción de  $ARL_1$  obtenido cuando se utiliza el gráfico de control DS-C en lugar del gráfico de control FP-C. Este indicador se calcula como en la ecuación 23.

$$\%ARL_1^{red} (Ref, DS-C) = \frac{ARL_1(Ref) - ARL_1(DS-C)}{ARL_1(Ref)} \times 100 \quad (23)$$

Se destaca la flexibilidad del esquema DS-C para adaptarse a un  $ARL_0$  deseado en todas las situaciones evaluadas. Esta flexibilidad es significativamente menor en el caso del gráfico de control FP-C.

También para todos los casos evaluados se observa que el gráfico DS-C presenta una  $ARL_1$  menor que el observado en el esquema de parámetros fijos (FP), con un porcentaje de reducción de  $ARL_1$  que oscila entre (28,76 % y 73,6 %), sin aumentar el costo de la inspección.

Es una práctica común optimizar los parámetros de un gráfico de control para garantizar que se obtiene un mejor rendimiento en la detección de una magnitud de cambio específica en los parámetros del proceso. Sin embargo, en la aplicación práctica, la magnitud de cambio para la que se ha optimizado el gráfico de control es solo uno del conjunto infinito de magnitudes posibles de desplazamientos que el proceso puede presentar.

Por ejemplo, para el caso de controlar el número de no conformidades, el número medio de no conformidades puede tener un cambio de magnitud  $\gamma = \gamma^*$  para el que se ha optimizado o puede presentar un cambio de magnitud  $\gamma \neq \gamma^*$  en el que no hay garantía de que su rendimiento sea óptimo. A fin de evaluar y comparar el rendimiento de los dos esquemas de control en diferentes puntos de magnitud de cambio, el perfil  $ARL_1$  de los distintos gráficos fue evaluado en diversos puntos de magnitud de cambio y son presentados en la Tabla 1. La columna tres de la Tabla 1 muestra el tamaño promedio de muestra requerido para controlar el proceso, mientras está bajo control.

Tabla 1  
 Diseño y rendimiento de los parámetros del gráfico de control FP-C y el  
 óptimo equivalente para el gráfico de control DS-C para  $\lambda_0$  y  $\gamma^*$  dados

$c_0 = \lambda_0$	$\gamma^*$	Scheme	$n_1$	$n_2$	$WL_1$	$UCL_1$	$UCL_2$	$ARL_0$	$ARL_1$	$\%ARL_1^{red}$
0.5		FP	1	1		3.5	3.5	570.9	137.13	54.10
	1.5	DS-C	0.315	4.671	0.5	4.5	7.5	570.9	62.94	
		FP	1	1		3.5	3.5	570.9	52.66	67.22
	2.0	DS-C	0.316	4.666	0.5	4.5	7.5	571.3	17.26	
		FP	1	1		3.5	3.5	570.9	15.23	70.39
	3.0	DS-C	0.316	4.666	0.5	4.5	7.5	571.3	4.51	
FP		1	1		4.5	4.5	273.2	53.83	60.02	
1	1.5	DS-C	0.521	4.961	1.5	6.5	11.5	273.3	21.52	
		FP	1	1		4.5	4.5	273.2	18.99	67.67
	2.0	DS-C	0.521	4.961	1.5	6.5	11.5	273.3	6.14	
		FP	1	1		4.5	4.5	273.2	5.41	58.96
	3.0	DS-C	0.598	3.355	1.5	7.5	9.5	273.4	2.21	
		FP	1	1		5.5	5.5	224.42	36.54	61.63
1.5	1.5	DS-C	0.408	4.703	1.5	6.5	14.5	224.47	14.02	
		FP	1	1		5.5	5.5	224.42	11.92	65.27
	2.0	DS-C	0.408	4.703	1.5	6.5	14.5	224.64	4.14	
		FP	1	1		5.5	5.5	224.42	2.87	41.46
	3.0	DS-C	0.528	2.500	1.5	6.5	10.5	225.56	1.68	
		FP	1	1		6.5	6.5	220.6	29.84	64.68
2.0	1.5	DS-C	0.539	4.817	2.5	8.5	18.5	221.1	10.54	
		FP	1	1		6.5	6.5	220.6	9.04	64.16
	2.0	DS-C	0.555	4.375	2.5	8.5	17.5	220.9	3.24	
		FP	1	1		6.5	6.5	220.6	2.54	44.49
	3.0	DS-C	0.663	2.258	2.5	8.5	12.5	222.3	1.41	
		FP	1	1		8.5	8.5	262.95	24.84	69.52
3.0	1.5	DS-C	0.556	4.997	3.5	8.5	26.5	263.23	7.57	
		FP	1	1		8.5	8.5	262.95	6.55	62.14
	2.0	DS-C	0.556	4.997	3.5	8.5	26.5	263.23	2.48	
		FP	1	1		8.5	8.5	262.95	1.84	35.87
	3.0	DS-C	0.701	1.838	3.5	11.5	15.5	263.04	1.18	
		FP	1	1		9.5	9.5	352.14	23.46	73.57
4.0	1.5	DS-C	0.452	4.951	3.5	10.5	33.5	353.11	6.20	
		FP	1	1		9.5	9.5	352.14	5.43	63.35
	2.0	DS-C	0.631	3.287	4.5	10.5	26.5	353.1	1.99	
		FP	1	1		9.5	9.5	352.14	1.53	28.76
	3.0	DS-C	0.726	1.608	4.5	12.5	18.5	357.25	1.09	

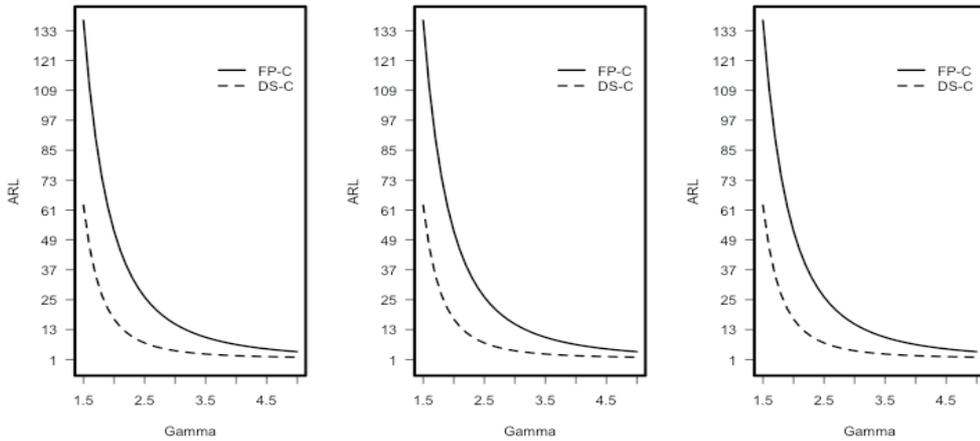
Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 2 se puede observar que el gráfico de control DS-C se destaca en todo el perfil de  $ARL_1$ , frente al gráfico de control de parámetros fijos FP-C, manteniendo su hegemonía no solo en el punto de optimización, sino a lo largo del perfil de magnitudes de cambio; todo ello sin incrementar los costos de muestreo.

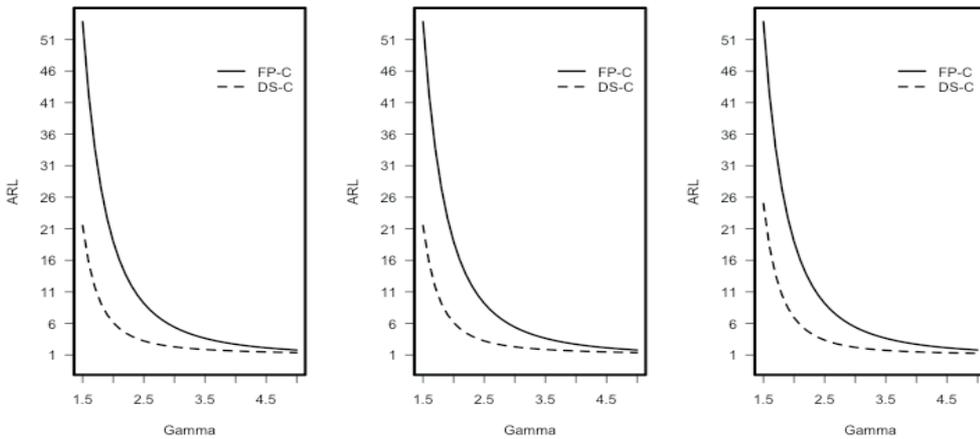
Tabla 2  
Tamaño medio de muestra y perfil de  $ARL_1$  ( $\gamma = 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5; 4,0; 4,5; 5,0$ ) para FP-C y el gráfico de control óptimo DS-C

$c_0 = \lambda_0$	$\gamma^*$	Scheme	$m$	$ARL_0$	$\gamma = \lambda_1/\lambda_0$							
					1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0.5		FP	1	570.9	137.13	52.66	26.13	15.23	9.92	7.00	5.25	4.13
	1.5	DS-C	0.995	570.9	<b>62.04</b>	17.26	7.65	4.51	3.18	2.52	2.14	1.91
	2.0	DS-C	0.999	571.3	62.94	<b>17.26</b>	7.65	4.51	3.18	2.52	2.14	1.91
	3.0	DS-C	0.999	571.3	62.94	17.26	7.65	<b>4.51</b>	3.18	2.52	2.14	1.91
	1	FP	1	273.2	53.83	18.99	9.19	5.41	3.64	2.69	2.14	1.79
	1.5	DS-C	1	273.3	<b>21.52</b>	6.14	3.22	2.28	1.86	1.63	1.47	1.36
	2.0	DS-C	0.999	273.3	21.52	<b>6.14</b>	3.22	2.28	1.86	1.63	1.47	1.36
	3.0	DS-C	0.999	274.9	25.17	6.97	3.37	<b>2.22</b>	1.73	1.49	1.35	1.26
	1.5	FP	1	224.42	36.54	11.92	5.65	3.37	2.34	1.80	1.50	1.32
1.5	1.5	DS-C	0.999	224.47	<b>14.02</b>	4.14	2.41	1.85	1.59	1.43	1.31	1.24
	2.0	DS-C	0.999	224.64	14.02	<b>4.14</b>	2.41	1.85	1.59	1.43	1.31	1.24
	3.0	DS-C	0.999	225.56	18.16	4.92	2.45	<b>1.68</b>	1.38	1.23	1.15	1.11
	2.0	FP	1	220.6	29.84	9.04	4.20	2.54	1.82	1.46	1.26	1.15
2.0	1.5	DS-C	0.998	221.1	<b>10.56</b>	3.25	2.02	1.60	1.38	1.24	1.16	1.11
	2.0	DS-C	0.999	220.9	10.88	<b>3.24</b>	1.97	1.55	1.34	1.22	1.14	1.09
	3.0	DS-C	0.999	222.3	14.23	3.73	1.94	<b>1.41</b>	1.21	1.12	1.07	1.04
3.0	FP	1	262.95	24.84	6.55	2.96	1.84	1.39	1.18	1.09	1.04	
	1.5	DS-C	0.998	263.23	<b>7.57</b>	2.48	1.67	1.36	1.20	1.11	1.06	1.03
	2.0	DS-C	0.998	263.23	7.57	<b>2.48</b>	1.67	1.36	1.20	1.11	1.06	1.03
	3.0	DS-C	0.999	263.04	11.48	2.79	1.51	<b>1.18</b>	1.08	1.03	1.02	1.01
4.0	FP	1	352.14	23.46	5.43	2.40	1.53	1.21	1.08	1.03	1.01	
	1.5	DS-C	0.999	353.11	<b>6.20</b>	2.12	1.51	1.27	1.14	1.08	1.04	1.02
	2.0	DS-C	0.999	353.71	7.21	<b>1.99</b>	1.34	1.15	1.06	1.03	1.01	1.00
	3.0	DS-C	0.998	357.25	10.52	2.36	1.32	<b>1.09</b>	1.03	1.01	1.00	1.00

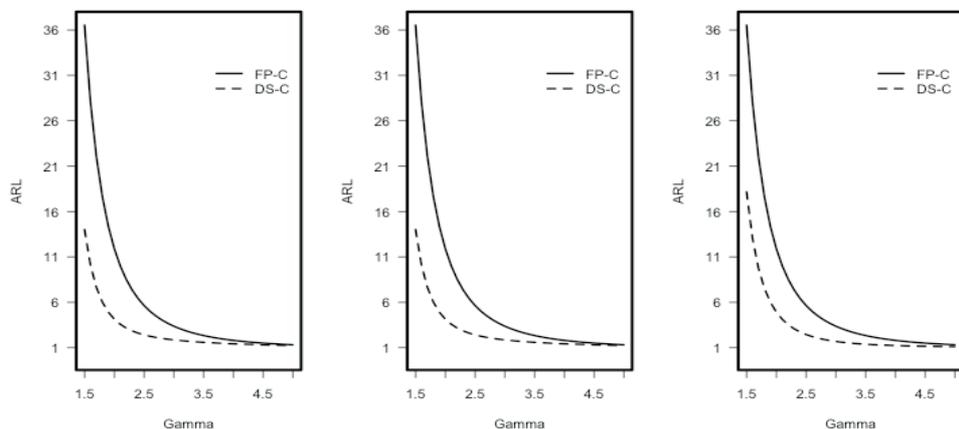
Fuente: Elaboración propia



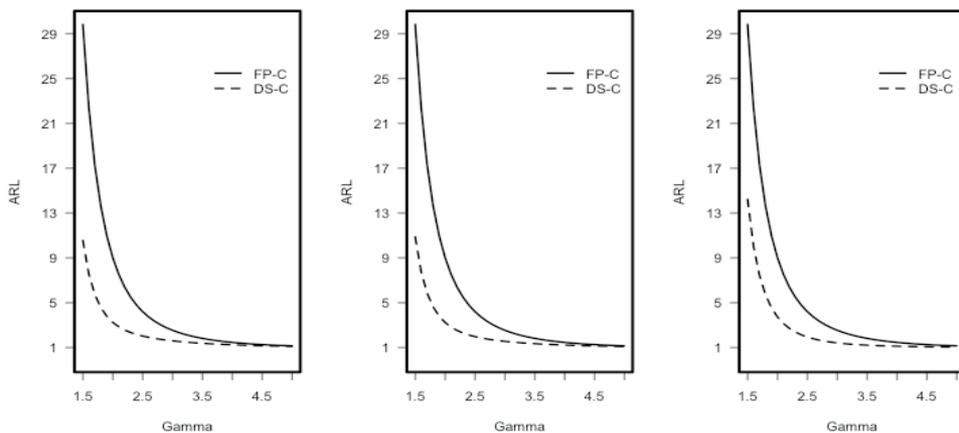
**Figura 2**  
**Curvas de ARLs para  $\lambda_0 = 0.5$ , optimizado para  $\gamma = 1.5, 2.0, 3.0$**   
Fuente: Elaboración propia



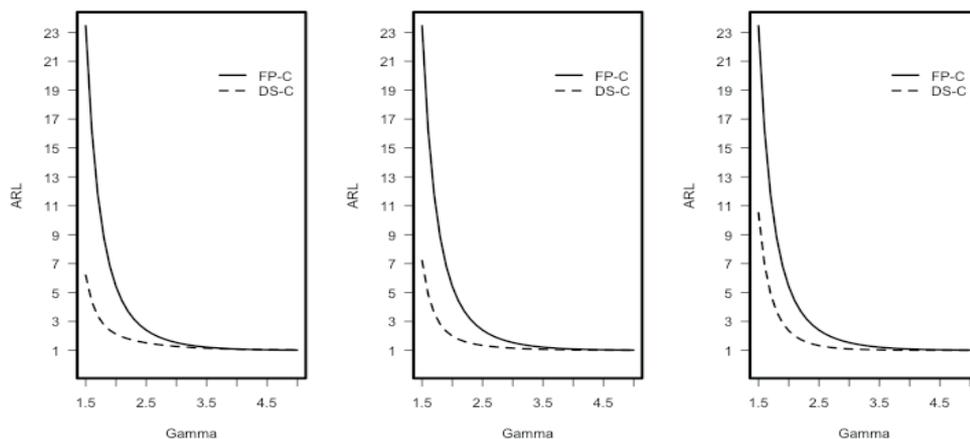
**Figura 3**  
**Curvas de ARLs para  $\lambda_0 = 1.0$ , optimizado para  $\gamma = 1.5, 2.0, 3.0$**   
Fuente: Elaboración propia



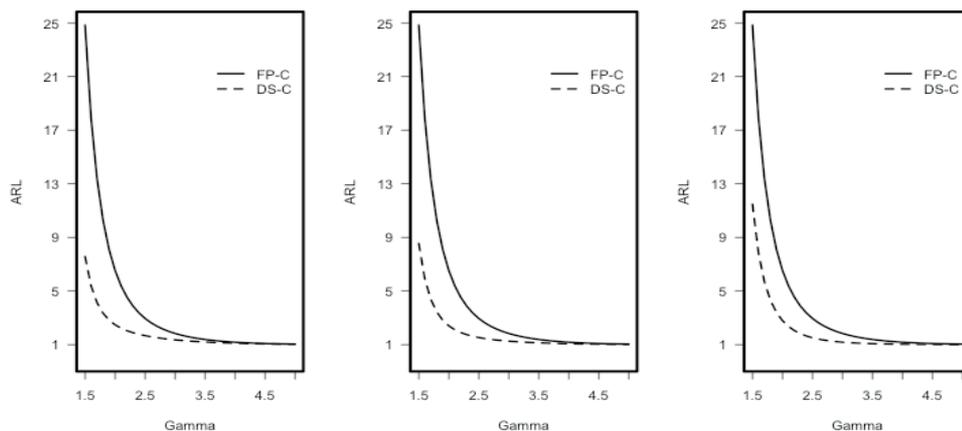
**Figura 4**  
*Curvas de ARLs para  $\lambda_0 = 1.5$ , optimizado para  $\gamma = 1.5, 2.0, 3.0$*   
Fuente: Elaboración propia



**Figura 5**  
*Curvas de ARLs para  $\lambda_0 = 2.0$ , optimizado para  $\gamma = 1.5, 2.0, 3.0$*   
Fuente: Elaboración propia



**Figura 6**  
*Curvas de ARLs para  $\lambda_0 = 3.0$ , optimizado para  $\gamma = 1.5, 2.0, 3.0$*   
Fuente: Elaboración propia



**Figura 7**  
*Curvas de ARLs para  $\lambda_0 = 4.0$ , optimizado para  $\gamma = 1.5, 2.0, 3.0$*   
Fuente: Elaboración propia

Las anteriores figuras representan las curvas del perfil de  $ARL_1$  para los dos esquemas con cada uno de los  $\lambda_0$  analizados y optimizado para los diferentes valores de  $\gamma^*$ , en dichas curvas se evidencia la superioridad que tiene el gráfico de control DS-C con respecto al gráfico de control FP-C en detectar los pequeños a moderados cambios en el número promedio de no conformidades del proceso a lo largo del perfil de cambios sin importar el punto específico para el cual es optimizado el esquema DS-C.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha propuesto una alternativa para la aplicación del gráfico de control C. Consiste en incorporar un esquema doble de muestreo, demostrando que dicho esquema puede detectar cambios en el número promedio de no conformidades del proceso de pequeños a moderados mucho más rápido que los gráficos tradicionales de parámetros fijos (FP-C), sin exigir más inspección o aumentar la tasa de falsas alarmas. Para lograr una velocidad de detección similar a la de un gráfico DS-C, el gráfico de parámetros fijos requieren más inspección y/u ofrecer menos protección contra falsas alarmas.

Se ha desarrollado una propuesta de algoritmo genético multiobjetivo para optimizar el gráfico de control DS-C. Utilizando este enfoque, el profesional puede acceder a diseñar los parámetros del gráfico de control, permitiendo:

1. Tasas de error pre-especificadas tipo uno (1) y tipo dos (2), minimizando los costos de inspección.
2. Minimizar uno de los dos indicadores,  $ARL_1$  o ASS, que cumplan con una tasa de error preestablecida tipo uno (1).

El profesional puede acceder a una de las dos alternativas de optimización prefijando los parámetros del procedimiento correspondiente. La ventaja del esquema DS-C se vuelve más relevante a medida que los requisitos de especificación para el proceso se vuelven más exigentes. Cuantos más altos son los requisitos, más importante es mejorar la sensibilidad del gráfico a pequeños cambios en la calidad del proceso. Debido a los tamaños de muestra típicamente grandes, esta relevancia puede ser todavía más clara en el caso de control por atributos en contraste al caso de control por variables.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Chong, Z. L., Khoo, M. B. & Castagliola, P. (2014), Synthetic double sampling NP control chart for attributes. *Computers & Industrial Engineering*, 75, 157-169.
- Costa, A. F. & Claro, F. A. (2008). Double sampling  $\bar{X}$  control chart for a first-order autoregressive moving average process model. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 39(5-6), 521-542.
- Croasdale, R. (1974). Control charts for a double-sampling scheme based on average production run lengths. *International Journal of Production Research*, 12(5), 585-592.
- Daudin, J. (1992). Double sampling  $\bar{x}$  charts. *Journal of Quality Technology*, 24(2), 78-87.
- De Araujo, A. A., Epprecht, E. K. & De Magalhaes, M. S. (2011). Double-sampling control charts for attributes. *Journal of Applied Statistics*, 38(1), 87-112.
- De Toro, F., Ortega, J., Fernández, J. & Díaz, A. (2002). Psfga: a parallel genetic algorithm for multiobjective optimization, (384-391). In *Parallel, Distributed and Network-based Processing*, Proceedings 10th Euromicro Workshop on IEEE.

- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S. & Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ll. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2), 182-197.
- Epprecht, E. & Costa, A. (2001). Adaptive sample size control charts for attributes. *Quality Engineering*, 13(3), 465-473.
- Epprecht, E. K., Costa, A. F. & Mendes, F. C. (2003). Adaptive control charts for attributes. *IIE Transactions*, 35(6), 567-582.
- Fonseca, C. M. & Fleming, P. J. (1998). Multiobjective optimization and multiple constraint handling with evolutionary algorithms. I. A unified formulation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 28(1), 26-37.
- He, D., Grigoryan, A. & Sigh, M. (2002). Design of double-and triple-sampling X-bar control charts using genetic algorithms. *International Journal of Production Research*, 40(6), 1387-1404.
- Holland, J. H. (1992). *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. Massachusetts, USA: MIT Press.
- Irianto, D. & Shinozaki, N. (1998). An optimal double sampling control chart. *International Journal of Industrial Engineering-Applications and Practice*, 5(3), 226-234.
- Konak, A., Coit, D. W. & Smith, A. E. (2006). Multiobjective optimization using genetic algorithms: A tutorial. *Reliability Engineering & System Safety*, 91(9), 992-1007.
- Montgomery, D. C. (2007). *Introduction to statistical quality control*. New York, USA: John Wiley & Sons.
- Pérez, E., Carrión, A., Jabaloyes, J. & Aparisi, F. (2010). Optimization of the new ds-u control chart: an application of genetic algorithms, (105-109). In *Proceedings of the 9th WSEAS international conference on Applications of Computer Engineering*.
- Riquelme, P., Gatica, G. & Orozco, E. (2015). Diseño de un modelo de operación para ruteo de transporte urbano basado en simulación discreta. *Investigación e Innovación en Ingenierías*, 3(2), 1-12.

- Vaughan, T. S. (1992). Variable sampling interval NP process control chart. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 22(1), 147-167.
- Whitley, D. (1994). A genetic algorithm tutorial. *Statistics and Computing*, 4(2), 65-85.
- Wu, Z. & Luo, H. (2004). Optimal design of the adaptive sample size and sampling interval NP control chart. *Quality and Reliability Engineering International*, 20(6), 553-570.
- Wu, Z., Luo, H. & Zhang, X. (2006). Optimal NP control chart with curtailment. *European Journal of Operational Research*, 174(3), 1723-1741.
- Wu, Z. & Wang, Q. (2007). An NP control chart using double inspections. *Journal of Applied Statistics*, 34(7), 843-855.

---

**Cómo citar este capítulo:**

Campuzano Hernández, M., Carrión García, A. & Barbosa Correa, R. (2018). Diseño óptimo de un esquema de muestreo doble para el gráfico de control C. En: A. Pulido-Rojano, P. Sánchez-Sánchez & E. Melamed-Varela. (eds.). *Nuevas tendencias en investigación de operaciones y ciencias administrativas. Un enfoque desde estudios iberoamericanos*. (pp.13-42). Barranquilla, Colombia: Ediciones Universidad Simón Bolívar.