

Esta obra sobre Contabilidad Analítica presenta una teoría matemática de la contabilidad con énfasis en las herramientas que provee el álgebra lineal para el análisis de las decisiones contable-administrativas. Aunque los contadores públicos atareados seguirán solicitando a los matemáticos que se encarguen de los estudios más importantes que requiere la gerencia, cada vez requerirán incluir un poco más de matemática en su quehacer contable de gestión, en la medida en que se han ido convirtiendo en mayores usuarios de los paquetes de hoja de cálculo. Por lo tanto, esta obra brinda a los futuros contadores (asesores y consultores gerenciales) un lenguaje fundamental para un mejor desempeño en la toma de decisiones y en la resolución de problemas que enfrenta el nuevo rol de los contadores públicos.



EDICIONES
UNIVERSIDAD
SIMÓN BOLÍVAR



RECONOCIDO POR
COLCIENCIAS
2014 - 2017

SAMUEL LEONIDAS PÉREZ GRAU

Contabilidad Analítica

Contabilidad Analítica

Métodos cuantitativos para la ciencia contable

SAMUEL LEÓNIDAS PÉREZ GRAU

EDICIONES
UNIVERSIDAD
SIMÓN BOLÍVAR



RECONOCIDO POR
COLCIENCIAS
2014 - 2017

El profesor Samuel Leónidas Pérez Grau es un sempiterno estudiante y de ello atestiguan sus títulos universitarios como Ingeniero Químico, Contador Público, Especialista en Gestión Tributaria, Aduanera y Cambiaria, Magíster en Administración Industrial, Promotor de Emprendimientos Industriales. También, ha tenido la oportunidad de desempeñarse como Ingeniero de Plantas Industriales por 10 años, Profesor universitario durante los últimos 24 años en las universidades Autónoma de Occidente (Cali), Santiago de Cali, ESAP, de Nariño (Pasto), Surcolombiana (Neiva), del Atlántico, UNAD, CUC y Simón Bolívar (Barranquilla).

EDICIONES
 UNIVERSIDAD
SIMÓN BOLÍVAR



RECONOCIDO POR
COLCIENCIAS
2014 - 2017

Contabilidad Analítica

SAMUEL LEÓNIDAS PÉREZ GRAU

EDICIONES
 UNIVERSIDAD
SIMÓN BOLÍVAR



RECONOCIDO POR
COLCIENCIAS
2014 - 2017

Contabilidad Analítica

SAMUEL LEÓNIDAS PÉREZ GRAU

Pérez Grau, Samuel Leónidas.

Contabilidad analítica: métodos cuantitativos para la ciencia contable / Samuel Leónidas Pérez Grau. – Barranquilla: Universidad Simón Bolívar, 2014.

176 p.; 17 x 24 cm.
ISBN: 978-958-8715-62-9

1. Auditoría 2. Contabilidad 3. Contabilidad financiera. I. Tit.
657.48 P438 2014 cd 21 ed.

Universidad Simón Bolívar-Sistema de Bibliotecas



PRESIDENTA SALA GENERAL
ANA BOLÍVAR DE CONSUEGRA

RECTOR FUNDADOR
JOSÉ CONSUEGRA HIGGINS (q.e.p.d.)

RECTOR EJECUTIVO
JOSÉ CONSUEGRA BOLÍVAR

DIRECTORA INSTITUTO DE INVESTIGACIONES
MARÍA DE LOS ÁNGELES PÉREZ HERNÁNDEZ

DEPARTAMENTO DE PUBLICACIONES
FRANCISCO JAVIER VÁSQUEZ DE LA HOZ

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable
Samuel Leónidas Pérez Grau©

ISBN: 978-958-8715-62-9

Todos los derechos reservados. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada en sistema recuperable o transmitida en ninguna forma por medios electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros, sin la previa autorización por escrito de Ediciones Universidad Simón Bolívar y de los autores. Los conceptos expresados de este documento son responsabilidad exclusiva de los autores y no necesariamente corresponden con los de la Universidad Simón Bolívar y da cumplimiento al Depósito Legal según lo establecido en la Ley 44 de 1993, los Decretos 460 del 16 de marzo de 1995, el 2150 de 1995, el 358 de 2000 y la Ley 1379 de 2010.

Ediciones
Universidad Simón Bolívar©
Carrera 54 No. 59-102
<http://publicaciones.unisimonbolivar.edu.co/edicionesUSB/>
dptopublicaciones@unisimonbolivar.edu.co
Barranquilla - Cúcuta

Impresión:
Editorial Mejoras
Calle 58 No. 70-30
info@editorialmejoras.co
editorial_mejoras@yahoo.com
www.editorialmejoras.co

A este libro se le aplicó
Patente de Invención No. 29069

Julio de 2014
Barranquilla

Printed and made in Colombia

Dedicatoria

Preferentemente, a mi hija Ángela y a mis nietos María Teresa y Gabriel Mauricio.

Admirablemente, a la doctora María de los Ángeles Pérez Hernández, directora del Centro de Investigaciones, cuyo tesón todo lo hace posible.

Respetuosamente, al C.P. Genner Maestre Maya por su acertado liderazgo que entusiasma para querer hacer el mejor trabajo.

Contenido

PRÓLOGO.....	11
PRESENTACIÓN.....	13
INTRODUCCIÓN.....	15
I. LOS MÉTODOS MATRICIALES EN CONTABILIDAD.....	21
Definiciones y notación básica.....	21
Las operaciones de suma y resta.....	25
La multiplicación de matrices.....	26
Matriz traspuesta.....	27
Cantidad escalar.....	28
Partición matricial.....	31
Matriz inversa.....	34
II. EL MODELO DE LAS CADENAS DE MARKOV PARA LA PROVISIÓN DE CUENTAS INCOBRABLES.....	41
Definiciones y notación básica.....	41
La construcción del modelo.....	44
La provisión de cuentas incobrables.....	47
III. EL MODELO DE CONTABILIDAD AGREGATIVA EN ESPACIOS VECTORIALES.....	49
Definiciones y notación básica.....	49
La inscripción de la información.....	51

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

La mayorización de los registros	56
Los procedimientos de ajuste y cierre.....	64
El vector de saldos de la matriz de balance	67
IV. EL MODELAMIENTO PARA EL ANÁLISIS	
DE LOS SISTEMAS CONTABLES	71
Definiciones y notación básica.....	71
Naturaleza de los modelos contables	73
Criterios aplicables a los modelos.....	76
La metodología de las proporciones	78
Hipótesis de una eficiencia global.....	82
La opinión del consultor contable ante los cambios en las variables	85
V. EL CONTROL DE LOS SISTEMAS	
CONTABLES DINÁMICOS.....	89
Definiciones y notación básica.....	89
Ecuaciones diferenciales ordinarias.....	91
Funciones de transferencia.....	94
Diagramas de bloques	98
Metodología del modelado de mediciones físicas o de variables matemáticas	103
Conceptualización.....	104
Formalización	105
Parametrización	115
Resolución	120
Validación	125
VI. SELECCIÓN DE ÍNDICES FINANCIEROS MEDIANTE	
LA APLICACIÓN DE TÉCNICAS ESTADÍSTICAS DEL	
ANÁLISIS MULTIVARIANTE	127
Desarrollo.....	128

Metodología	129
Interludio matemático	135
Justificación.....	137
Procedimiento	138
Resultados	143
Validación	148
Discusión.....	154
CONCLUSIONES	163
ANEXOS	167
Anexo 1. Total Anual Móvil de Ventas	167
Anexo 2. Total Anual Móvil de Cartera.....	167
Anexo 3. Conformación de las variables V^2 y B.....	168
Anexo 4. Conformación de las variables P^2 y A	168
Anexo 5. Condiciones alrededor del punto de operación lineal de dos tanques interconectados sin interacción.....	169
Anexo 6. Espacio de estados descrito por un subsistema hidráulico	170
Anexo 7. Variables del subsistema mecánico de costos y gastos.....	171
Anexo 8. Serie de doce periodos anuales de los Estados Financieros de la empresa (primera parte).....	172
Anexo 9. Serie de doce periodos de los Estados Financieros de la empresa (segunda parte)	174
REFERENCIAS.....	177

Prólogo

La obra *Contabilidad Analítica: Métodos cuantitativos para la ciencia contable* del ingeniero y maestro Samuel Leónidas Pérez Grau, despertará sin duda una mayor y mejor comprensión de las diferentes áreas que rodean a la técnica contable entre las que se encuentra el área matemática. Los profesionales de la Contaduría no entenderían, ni justificarían su actuar sin el dominio cada vez más recurrente de herramientas matemáticas; desde el uso del álgebra hasta el desarrollo y aplicación de matrices.

Las nuevas normas contables internacionales de contabilidad requieren para un correcto entendimiento, el dominio de elementos de carácter económico y financiero; en ambas áreas del conocimiento se requiere la aplicación de instrumentos matemáticos. Adicionalmente el requerimiento de la informática, la cual demanda un lenguaje común que establezca un puente entre su desarrollo y la Contaduría, no podría entenderse sin el desarrollo de modelos matemáticos.

Las personas involucradas en el desempeño y aplicación de la Contaduría, requieren comprender los resultados obtenidos y su comportamiento a través del tiempo, e incluso su comportamiento futuro, para poder explicarlos a las diferentes personas que han contratado sus servicios; obliga al uso y aplicación de la contabilidad analítica que da un amplio uso a expresiones y fórmulas matemáticas.

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Resulta muy gratificante encontrarse con personas como el maestro Pérez Grau, que con sus obras ayudan a estudiantes, profesores y profesionales de la Contaduría a tener un soporte racional de las diferentes decisiones de carácter económico que se toman día a día en los diferentes espacios en los cuales se requiere de la aplicación de la Contaduría Analítica.

Adicionalmente esta obra cuenta con una importante garantía, ya que ha sido respaldada por una de las universidades de mayor prestigio, como lo es la Universidad Simón Bolívar ubicada en Barranquilla, Colombia. Todo esto la convierte en una obra indispensable para el acervo bibliográfico de los profesionales de la Contaduría y las Finanzas.

Salvador García Briones
Contador Público Certificado y Maestro en Finanzas
Facultad de Contaduría y Administración
Universidad Nacional Autónoma de México

Presentación

Me es sumamente honroso y muy placentero haber sido designado para presentar esta importante obra *Contabilidad Analítica: Métodos cuantitativos para la ciencia contable* de la autoría del ilustre colega C.P. Samuel Pérez Grau M.Sc. Industrial Management, que se constituye como un referente del nuevo rol gestor que asumen los contadores públicos con motivo del advenimiento de la perspectiva de la contabilidad como información.

La aplicación histórica más apreciada de la matemática en general, se identifica con la contabilidad, por su capacidad de ejecución de cuentas. Con mayor razón en los tiempos actuales, la expresión de las variables contables en términos matemáticos, sigue siendo una exigencia ineludible cuando esa misma contabilidad (valor) que afecta las creencias del tomador de decisiones sobre las consecuencias de sus acciones relacionadas con unos estados financieros del pasado, se ha vuelto contabilidad (información), que condiciona las acciones del decisor en su relación con informes contables recientes.

Es que aquello que empezara en la segunda mitad de la década de 1970 bajo la lupa de la teoría de juegos y la decisión bayesiana como una modelación de la relación contractual entre el “principal” y el “agente”, los diversos costos de agencia, la distribución de riesgos y el problema de los incentivos, como también ribeteado por un enfoque probabilístico del espacio de estados-actos-resultados, rápidamente se ha convertido en una versión racionalista de la tradicional mayordomía y se ha configurado como el paradigma central de la

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Contabilidad de Gestión, la contabilidad ya dominante entre las nuevas camadas de contadores públicos.

En su libro, el magíster Samuel Pérez Grau distingue muy bien entre lo que son variables, modelos, métodos estocásticos, métodos numéricos, control de sistemas y análisis estadístico, conceptos estos que se refieren a entornos “donde la incertidumbre es nuestra única certeza” y, de entre los que deducimos, son los modelos estocásticos (probabilísticos) “nuestra mejor apuesta”.

Todos los profesionales de la gestión contable hemos de estar muy satisfechos de esta obra, tanto por lo que contribuye al nuevo conocimiento como por su invitación a involucrarnos cada vez más en el análisis matemático del acto contable y por ende a la mejora de la competitividad de nuestra economía y de nuestra sociedad.

Danilo Hernández Rodríguez
Contador Público MBA
Docente Investigador Principal

Introducción

Este libro es producto de investigación derivado del proyecto Contabilidad de los Fenómenos Patrimoniales del Grupo Pensamiento Contable de la Universidad Simón Bolívar. La motivación principal de esta investigación ha sido revelar la necesidad profesional del contador público de saber resolver problemas del álgebra de matrices e ilustrar la representación de observaciones sistemáticas contables en un espacio de estados, relacionados con los procesos de toma de decisiones sobre aspectos operacionales, financieros y administrativos de las empresas.

La contabilidad analítica es aquella en la que utilizamos fórmulas o expresiones matemáticas para encontrar los resultados buscados. Según el estudioso austroamericano Richard Mattesich (1964), “el padre fundador de la contabilidad analítica lo es Gabriel Preinreich (1933) por sus trabajos basados en interés compuesto, anualidades y cálculos de valor presente para el cálculo de la depreciación, amortización e inversión”.

La matemática actual se caracteriza por el predominio del álgebra y se habla cada vez más de la algebrización de todas las ramas de la tradicional matemática. En la actualidad, los desarrollos en el manejo de la informática han otorgado mayor importancia al álgebra lineal o de matrices, llegando a convertirla en una especie de teoría matemática de generalizaciones y nuevos métodos de análisis, que provee eficaces herramientas de análisis en todos los campos del saber y, desde luego, en diversos problemas de la contaduría, la administración y la economía.

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Igualmente mencionamos las aplicaciones de la simulación y la modelación al desarrollo de la finanza en la que se vinculan índices y razones financieras como objeto matemático. Desafortunadamente, no todos estos modelos admiten métodos analíticos para la solución debido a que a veces su aplicación puede resultar muy compleja. Cuando esto sucede, es conveniente hacer uso de técnicas numéricas, las cuales mediante una serie de cálculos (iteraciones) conducen a soluciones aproximadas que son siempre numéricas. En el caso de tener que realizar múltiples iteraciones para la obtención de la solución numérica, es indispensable el empleo de computadoras.

La matemática siempre ha configurado un importante complemento de la Ciencia Contable. Las matrices en contabilidad ya eran conocidas en el siglo XIX, pero el álgebra de matrices parece haber sido utilizada por primera vez en la macro-contabilidad de Leontief (1951). Al respecto, comenta Mattesich (1964), “hay dos áreas matemáticas del siglo XX que hacen polémico el uso de la expresión “analítica” dada la naturaleza inductivo-empírica de su aplicación. Estas son el muestreo estadístico para la contabilidad y en particular para la auditoría introducida por Laurence Vance (1950) y las hojas de cálculo informatizadas para la contabilidad empresarial propuesta por primera vez por Mattesich (1961)”.

En la década de 1970 la contabilidad analítica enrumbó el descontento disciplinar que generaba el marco de normas y principios erigido por asociaciones gremiales privadas con intentos de axiomatizar la teoría contable. Agrega Mattesich (1964) que “de Alemania son conocidos los trabajos de Erich Kosiol (1970, 1978) y de Marcel Schweitzer (1970, 1972). En Australia, la búsqueda fue continuada por Murray Wells (1971, 1976) y en Japón por Shizuki Saito (1972, 1973). En los Estados Unidos se reanudó la discusión con la tesis doctoral de Kenneth Orbach (1978). En Italia se manifestó un interés similar en Pietro Onida (1970) y Guissepe Galassi (1978) y desde España en Moisés García (1970), José María Requena (1972) y Eduardo Buenos (1978)”.

Igualmente, en las publicaciones de Stephen Zeff (1982) y Adrienne Slaymaker (1996) se menciona que “toda esta pléyade de trabajos influyó en la construcción del marco conceptual del FASB (1978)”, aunque esta oleada, continúa diciendo Mattesich (1964) “seguiría durante 1980 y 1990 con los trabajos de los ingleses J.M. Gutiérrez y G. Whittington (1997), del alemán Georg Herde (1992), el japonés Yoshiaki Koguchi (1990), los argentinos Eduardo Scarano, H.E. Ávila y G. Bravo (1988) y del brasileño Antonio Lopes de Sá (1995)”. Hasta aquí, la historia de la contabilidad analítica. Ahora sucintamente veremos cómo a la contabilidad le ha tomado 30 años para modificarse hasta su estado actual.

Como es sabido, algunas fuentes de la información tradicional son recursos estándares que se ofrecen en el mercado, pero en muchos otros casos los demandantes de información necesitan rebuscar ciertas fuentes específicas que le puedan proporcionar el mayor valor agregado. Resulta por ello inevitable que la información como producto y/o servicio estará bajo investigación extensiva por parte de los usuarios, debido a sus propias presiones acerca de lo que vaya a hacer con la información y, la consecuencia principal de este estudio personal habrá de ser la toma de conciencia de esta dualidad de la información como valor de intercambio y como valor de uso.

Theodore Mock (1973) planteaba que los sistemas de información contables deberían basarse en el valor del aprendizaje de la retroalimentación contable. Esto significa que un sistema de información contable debe ser avalado de acuerdo a su contribución al aprendizaje, valoración y control de la información. Por su parte, los trabajos de Michael Jensen y William Meckling (1976) brindaron la oportunidad para que Joel Demski, Gerald Feltham, Peter y Jhon Christensen y otros, reformularan la teoría de la agencia en términos matemáticos más rigurosos.

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Así, vino la fusión de la teoría de la información (en su marco probabilístico como la búsqueda de la mejor información y en su otro marco con énfasis en el valor de la información como producto) y la teoría de la agencia (con su orientación hacia el comportamiento gerencial) para ser presentada en los trabajos de J. Christensen y Demski (2003) como la “perspectiva de la contabilidad como información”. Además, esta perspectiva de la contabilidad como sistema de información también hacía hincapié en la distinción entre información pública y privada y sus implicaciones sobre cada uno de los mercados financieros.

Esta nueva configuración teórica de la contabilidad, sobre todo para la contabilidad financiera va soportada por muchos modelos estocásticos (probabilísticos) y métodos numéricos (iterativos) de gran rigor matemático que la alejan de la contabilidad analítica. La tediosa construcción de modelos de pertinencia aleatoria programable explica, por sí solo, este largo periodo de gestación.

Luego, P. Christensen y Feltham (2005) completan la distinción entre el papel de la contabilidad (información) como facilitador de decisiones (que afecta a las creencias del decisor sobre las consecuencias de sus acciones, como en la contabilidad financiera) frente a la contabilidad (valor) como factor influyente en las decisiones (que condiciona las acciones de un tomador de decisiones en su relación con informes contables, como en la contabilidad gerencial).

Se está viendo entonces, que la investigación en economía de la información aplicada a la contabilidad ha ido forzando el cambio desde un enfoque de una contabilidad centrada en la valoración como un proceso pragmático, hacia un enfoque predominantemente de ciencia social en el que la contabilidad asume la función del suministro de información útil para una amplia gama de propósitos que generan distintos juegos de principios y normas contables para los fines de cada usuario (contabilidad financiera, contabilidad gerencial y contabilidad tributaria).

La mayoría de contadores (ya sean profesionales o académicos) son básicamente conservadores y por lo tanto son renuentes a abandonar la orientación de valores profundamente arraigados, sin embargo, no pueden abstraerse al fenómeno rampante de la globalización que hace de las economías nacionales unas entidades cada vez más integradas en sistemas sociales abiertos e interdependientes, sujetos a los mercados y a la internacionalización financiera, lo cual en el campo contable tiene mayor auge en la presentación de reportes financieros y en la utilización de nuevas tecnologías de la información.

Finalmente, debemos advertir que si bien el modo del registro y análisis de los procesos contables de las más grandes empresas son computarizados, allí se hacen las mismas sumarizaciones periódicas de las cuentas para la confección de los estados financieros (Mattesich, 1972). Y más aún, recordar que las tareas del procesamiento de la información contable van mucho más allá de la confección de los estados financieros, pues también abarcan la competencia para analizar, proyectar, simular y programar el comportamiento contable de las empresas (Hillier & Hillier, 2010), todo lo cual, se está refiriendo a la algebrización de la contabilidad, es decir, a la contabilidad analítica.

En síntesis, este proyecto encarna un llamado especial al Programa de Contaduría de la Universidad Simón Bolívar, a ASFACOP (Asociación Colombiana de Facultades de Contaduría Pública), a ALAFEC (Asociación Latinoamericana de Facultades y Escuelas de Contaduría y Administración) y a los diversos entes universitarios de planeación curricular de los Programas de Contaduría Pública de los países en vías de desarrollo, entrar a considerar la conveniencia de reprogramar cursos de álgebra lineal y porqué no, también de ecuaciones diferenciales, aplicados a hechos y fenómenos contables en la currícula de la carrera de Contaduría Pública.

I. Los métodos matriciales en contabilidad

Definiciones y notación básica

En muchos trabajos de contabilidad el álgebra de matrices es vital en el ejercicio de la profesión contable, por ejemplo, para el tratamiento de flujos contables en la contabilidad de gestión, la representación de contribuciones en la contabilidad de costos, el planeamiento financiero y en la contabilidad financiera. Es pues necesario tener más conciencia de su aplicación en el ejercicio profesional, para superar posibles inconsistencias entre el valor formativo implícito de lo jurídico normativo que se le ha brindado al perfil del contador público y el carácter empírico-analítico que le imprime la utilización de la matemática.

Una matriz es simplemente un arreglo de números. Estos arreglos pueden tener tres y más dimensiones, aunque habitualmente trabajamos con matrices de dos dimensiones.

La dimensión de una matriz se determina según el número de filas y columnas que posee. Convencionalmente, una matriz de “m” filas y “n” columnas tiene dimensión “m x n”. A cada elemento a_{ij} corresponde una fila i-ésima y una columna j-ésima. En general, una matriz se representa por medio de letras mayúsculas en negrita, es decir, **A** significa la matriz A, pero también se utiliza la nomenclatura $[a_{ij}]_{m \times n}$ o simplemente $[a_{ij}]$.

Observe que siempre se menciona primero el número de filas y posteriormente

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

el número de columnas. La aritmética matricial consiste de las mismas operaciones de suma, resta y multiplicación, aunque siguiendo ciertas condiciones específicas. La división en este caso no está definida, sin embargo, más adelante veremos cómo, en cierto sentido, la matriz inversa A^{-1} puede verse como el divisor de la operación aritmética de la división.

Para ilustrar la manera de trabajar estas operaciones en aritmética de matrices, partiremos del siguiente caso:

La empresa Calcáreos del Caribe S.A. localizada en Soledad (Atlántico) ha ampliado sus actividades de mercado a todo el país abriendo sucursales en las ciudades de Bogotá y Cali. Sus productos son pisos y enchapes de marmolina (I), molduras y rosetas de yeso (II), carbonatos de calcio (III) y caolines (IV), los cuales vende a bodegas de mayoristas de materiales de construcción, ferreterías de barrios y constructores de edificaciones. A partir de los siguientes datos correspondientes a las operaciones del primer trimestre del presente año, la empresa desea determinar:

- a) *Número de unidades despachadas, por producto y por tipo de cliente.*
- b) *Total de unidades entregadas por producto.*
- c) *Valor de las ventas.*
- d) *Nomina de ventas.*
- e) *Costo de producción de las unidades vendidas.*
- f) *Utilidades antes de impuestos.*

Tabla 1. Despacho de mercancías por ciudades, por productos y por tipo de clientes

Productos	Bodegas	Ferreterías	Constructores
	Soledad		
Pisos	424	530	608
Molduras	259	442	360
Cales	207	498	314
Caolines	259	206	304

Samuel Leónidas Pérez Grau

	Bogotá		
Pisos	410	516	510
Molduras	288	418	336
Cales	279	444	356
Caolines	206	266	266
	Cali		
Pisos	310	434	510
Molduras	157	380	428
Cales	316	403	458
Caolines	219	203	297

S. Pérez (2013). Elaboración propia

Tabla 2. Informe de mercancías siniestradas durante el transporte

Productos	Bodegas	Ferreterías	Constructores
	Cali		
Pisos	27	10	15
Molduras	13	30	25
Cales	20	0	25
Caolines	6	20	0

S. Pérez (2013). Elaboración propia

Tabla 3. Precio de venta por tipo de producto

Producto	Precio Unitario
Pisos	86.000
Molduras	156.000
Cales	157.000
Caolines	56.000

S. Pérez (2013). Elaboración propia

Tabla 4. Nómina mensual de ventas por ciudades y categoría del personal

Categoría	Soledad	Bogotá	Cali
Gerente de ventas	9.500.000	11.900.000	9.600.000
Coordinador de logística	8.000.000	16.000.000	10.000.000
Vendedores	11.000.000	28.200.000	17.800.000

S. Pérez (2013). Elaboración propia

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

La departamentalización de la producción está organizada por productos y servicios, así:

Tabla 5. Costos de producción del periodo

Costos directos		Costos indirectos	
Pisos	127.927.800	Alquiler maquinarias	101.959.880
Molduras	174.447.000	Lubricantes	47.600.000
Cales	116.298.000	Energía	29.546.320
Caolines	162.817.200	Agua	84.539.700
		Depreciaciones	49.464.100
TOTAL	\$581.490.000	TOTAL	\$313.110.000

S. Pérez (2013). Elaboración propia

Tabla 6. Elementos de los CIF

	Alquiler Maqs.	Fuerza motriz	Iluminación
Pisos	2.096 HM	2 maq.x42 KW x 8hd x 6d = 4.025 KWh/s	25 bomb x 1KW x 12hd x7 = 2.103 KWh/s
Molduras	3.606	3 x 125 Kw x 8 x 6d = 18.028	0
Cales	960	4 x 146 x 8 x 6 = 28.043	0
Caolines	2.640		15 x0,5 x12 x7 = 630
Calderas	-		0
Calidad	2.681		5 x0,5 x12 x7 = 210
Mantto.	1.984		834 x1 x12 x7 = 70.095
TOTALES	13.967 HM	50.096 KWh/s	10.018 KWh/s

S. Pérez (2013). Elaboración propia

El alquiler de maquinarias y la lubricación se distribuyen según el número de horas máquina de cada dependencia. La energía comprende las erogaciones por fuerza motriz e iluminación. El costo del agua se distribuye según el consumo de metros cúbicos y la depreciación según el valor en millones de los activos depreciables de cada sección.

Tabla 6 (continuación). Elementos de los CIF

	Consumo de agua	Inmuebles depreciables
Pisos	107 Hm cúbicos	14.151.600 miles de pesos
Molduras	143	18.868.800
Cales	215	23.586.000
Caolines	72	14.151.600
Calderas	72,44	9.434.300
Mantenimiento	107	14.151.600
Calidad	0	0
TOTALES	716,44	94.343.300

S. Pérez (2013). Elaboración propia

Las operaciones de suma y resta

Solución: Lo primero que debe hacerse es organizar los datos en forma matricial:

$$S = \begin{bmatrix} 424 & 259 & 207 & 259 \\ 530 & 442 & 498 & 206 \\ 608 & 360 & 314 & 304 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 410 & 288 & 279 & 206 \\ 516 & 418 & 444 & 266 \\ 510 & 336 & 356 & 266 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 310 & 157 & 316 & 219 \\ 434 & 380 & 403 & 203 \\ 510 & 428 & 458 & 297 \end{bmatrix}$$

a) Ahora, para hallar el total de unidades despachadas, se debe efectuar la suma de las tres matrices, esto es:

$$D = S + B + C,$$

“La suma de matrices se efectúa mediante la adición de los correspondientes elementos individuales”. En números, esto es:

$$D = \begin{bmatrix} 424 + 410 + 310 & 259 + 288 + 157 & 207 + 279 + 316 & 259 + 206 + 219 \\ 530 + 516 + 434 & 442 + 418 + 380 & 498 + 444 + 403 & 206 + 266 + 203 \\ 608 + 510 + 510 & 360 + 336 + 428 & 314 + 356 + 458 & 304 + 266 + 297 \end{bmatrix}$$

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

De lo anterior, puede deducirse que solo pueden ser sumadas matrices que tengan la misma dimensión. En consecuencia, la suma y resta de matrices con dimensiones desiguales, no está definida.

b) Siguiendo con el problema, para conocer la cantidad real de los pedidos atendidos, se deben sustraer las unidades siniestradas que nunca llegaron a su destino, esto es:

$$P = D - X,$$

“La resta de matrices se efectúa mediante la sustracción de los correspondientes elementos individuales”. En números, esto es:

$$P = \begin{pmatrix} 1.144 - 27 & 704 - 13 & 802 - 20 & 684 - 6 \\ 1.480 - 10 & 1.240 - 30 & 1.345 - 0 & 675 - 20 \\ 1.628 - 15 & 1.124 - 25 & 1.128 - 25 & 867 - 0 \end{pmatrix}$$

Como puede deducirse, es posible sumar y restar más de dos matrices de iguales dimensiones, simplemente efectuando estas operaciones por pares, esto es:

$$[(S + B + C) - X] = [(B + C) + (S - X)] = [(S + C) + (B - X)] = [(S + B) + (C - X)]$$

La multiplicación de matrices

c) Para conocer el valor de los ingresos por ventas, debemos conocer primero el número total de unidades **PT** realmente entregadas y posteriormente se debe multiplicar este número de unidades entregadas por el precio unitario **p** de venta.

“La multiplicación de matrices solamente está definida si en cada producto

posible el número de columnas de la matriz de la izquierda, es igual al número de filas de la matriz de la derecha” (Thierauf, 1995).

Considerando, por ejemplo, el siguiente producto de matrices, se observa que:

“Si el producto $\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{p} = \mathbf{V}$ es definido, siendo \mathbf{V} denotado como $[v_{ij}]$, entonces cada elemento v_{ij} se obtiene mediante la suma de los productos que resultan de la multiplicación del elemento en la fila i -ésima de \mathbf{P} por el correspondiente elemento en la columna j -ésima de \mathbf{p} ”.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ai + bm) & (aj + bn) & (ak + bo) & (al + bp) \\ (ci + dm) & (cj + dn) & (ck + do) & (cl + dp) \\ (ei + fm) & (ej + fn) & (ek + fo) & (el + fp) \\ (gi + hm) & (gj + hn) & (gk + ho) & (gl + hp) \end{pmatrix}$$

Matriz traspuesta

“Se llama matriz traspuesta (\mathbf{P}^T) otra matriz obtenida mediante la transposición de los papeles entre las filas y las columnas de determinada matriz original (\mathbf{P})”.

“Las matrices compuestas por una sola fila o una sola columna, reciben el nombre de vector fila o vector columna”. “Un vector traspuesto puede obtenerse mediante la multiplicación de los vectores columna de la matriz original (\mathbf{P}), o de los vectores fila de la matriz original, por un vector fila o columna (\mathbf{U}) compuesto de ‘unos’” (Calafell, 1981).

En consecuencia, conocida la matriz \mathbf{P} , podemos convertirlo en un vector fila mediante:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^T$$

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

esto es, el vector número total \mathbf{P}^T de unidades realmente entregadas se obtiene según:

$$\mathbf{P}^T = [1 \ 1 \ 1] \times \begin{bmatrix} 1.117 & 691 & 782 & 678 \\ 1.470 & 1.210 & 1.345 & 655 \\ 1.613 & 1.099 & 1.103 & 867 \end{bmatrix} = [4.200 \ 3.000 \ 3.230 \ 2.200]$$

Por lo tanto, el valor de las ventas en dinero de las unidades vendidas está dado según:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{p} = [4.200 \ 3.000 \ 3.230 \ 2.200] \times \begin{bmatrix} 86.000 \\ 156.000 \\ 157.000 \\ 56.000 \end{bmatrix} =$$

Lo cual es susceptible de sumar para conocer el valor total de los ingresos por ventas, esto es:

$$[361.200.000 \ 468.000.000 \ 507.110.000 \ 123.200.000] = \$ 1.459.510.000$$

d) Para conocer el valor de la nómina por las ventas del trimestre por categorías de cargos, simplemente triplicamos el valor de la nómina total mensual.

En primer lugar, sumamos las nóminas mensuales por ciudades, así:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 9.500.000 \\ 8.000.000 \\ 11.000.000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11.900.000 \\ 16.000.000 \\ 28.200.000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9.600.000 \\ 10.000.000 \\ 17.800.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31.000.000 \\ 34.000.000 \\ 57.000.000 \end{bmatrix}$$

Cantidad escalar

Ahora, recordamos que “en la aritmética matricial, *un número simple o constante recibe el nombre de ‘escalar’*”.

“El producto de un escalar por una matriz es similar al producto de una matriz cuadrada (a la izquierda) cuyo número de columnas es igual al número de filas de la matriz (a la derecha) y en la que todos sus elementos son cero excepto los de la diagonal principal en la que todos los elementos son iguales al escalar”. Si “h” es un escalar y **H** es una matriz, el producto h.**H** es otra matriz dada según h.[h_{ij}].

En estas condiciones, tenemos que el valor en dinero de la nómina del trimestre es:

$$\mathbf{G} = h \cdot \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 31.000.000 \\ 34.000.000 \\ 57.000.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93.000.000 \\ 102.000.000 \\ 171.000.000 \end{bmatrix}$$

Aquí, para efectos de comparación con los otros rubros, se hace necesario convertir la matriz **G** en un vector fila mediante la expresión:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{G}^T$$

De donde resulta el vector gasto total **G^T** correspondiente a la nómina de ventas:

$$\mathbf{G}^T = [1 \ 1 \ 1] \times \begin{bmatrix} 93.000.000 \\ 102.000.000 \\ 171.000.000 \end{bmatrix} = [93.000.000 \ 102.000.000 \ 171.000.000]$$

Lo cual es susceptible de sumar para conocer el valor total nacional de la nómina de ventas, esto es:

$$[93.000.000 \ 102.000.000 \ 171.000.000] = \$ 366.000.000$$

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

e) Para conocer el costo de producción de las unidades vendidas, tendremos que establecer el vector columna D_o (1x4) de cuatro componentes para representar el total de los costos directos operacionales de cada departamento operativo y, similarmente, el vector columna I_s (1x3) de tres componentes para representar el total de los costos indirectos de los departamentos de servicio.

La complejidad de la situación surge del hecho de tener que hacer un prorrateo primario de los costos indirectos de fabricación (CIF) entre los departamentos operativos y de servicio antes de poder conocer los vectores D_o e I_s , lo cual se muestra en el siguiente cuadro.

Cuadro 1. Método del Prorrateo Primario (Horizontal) para la asignación de los CIF a Departamentos Operativos

	Alquiler Maquinarias	Lubricantes	Energía	Depreciaciones	Agua	Totales
Pisos	15.300.930	7.184.615	4.425.000	7.375.000	12.626.000	46.911.545
Molduras	26.324.360	4.667.115	13.127.500	9.892.500	16.874.000	70.885.475
Cales	7.008.000	7.046.570	6.142.620	12.366.250	25.370.000	57.933.440
Caolines	19.268.680	2.331.410	457.250	7.375.000	8.496.000	37.928.340
Calderas	0	2.331.410	0	7.375.000	8.547.700	18.254.110
Mantenimiento	14.485.380	0	5.240.550	0	12.626.000	32.351.930
Calidad	19.572.530	24.038.880	153.400	5.080.350	0	48.845.160
SUBTOTALES	101.959.880	47.600.000	29.546.320	49.464.100	84.539.700	313.110.000
			101.959.880	47.600.000		
TOTALES			\$131.506.200	\$97.064.100	\$84.539.700	\$313.110.000

S. Pérez (2013). Elaboración propia

Obsérvese que para poder formar matrices de tres columnas, como tres son los departamentos de servicio (calderas, mantenimiento y calidad), hemos tenido que integrar las parejas de columnas alquiler de maquinaria-energía y lubricante-depreciación, como si en cada caso se tratase de una sola clase de costo.

Cuadro 2. Método de la Partición Vertical (7X3) para la Distribución Fraccional de los CIF

Pisos			0,15	0,15	0,15	
Molduras			0,10	0,20	0,30	
Cales			0,30	0,15	0,20	
Caolines			0,15	0,10	0,10	
Calderas			0	0,10	0,10	
Mantenimiento			0,15	0	0,15	
Calidad			0,15	0,30	0	
			1,000	1,000	1,000	

S. Pérez (2013). Elaboración propia

También, debe resaltarse que bajo el método del prorrateo secundario, en una etapa subsiguiente, la sumatoria (horizontal) de los costos pertenecientes a cada departamento de servicio, tendría que haber sido distribuida entre los departamentos operativos. Por lo tanto, al proseguir bajo el método de la partición basada en una consideración vertical de las clases de costos en procura de construir una matriz $F_{7 \times 3}$, se estaría denotando una transposición de las clases de costo pertenecientes a los departamentos de servicio.

Partición matricial

Una partición es una de las partes resultante al dividir una matriz en submatrices mediante el trazado de líneas horizontales o verticales entre las filas o columnas (Bronson, 1991). Obviamente es posible partir una matriz de muchas formas diferentes según los lugares escogidos para trazar las líneas separadoras. En el siguiente ejemplo, la matriz F ha sido partida entre las matrices $E_{4 \times 3}$ y $G_{3 \times 3}$

$$F = \text{matriz de asignación fraccional} = \begin{pmatrix} E \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,15 & 0,15 \\ 0,10 & 0,20 & 0,30 \\ 0,30 & 0,15 & 0,20 \\ 0,15 & 0,10 & 0,10 \\ \hline 0 & 0,10 & 0,10 \\ 0,15 & 0 & 0,15 \\ 0,15 & 0,30 & 0 \end{pmatrix}$$

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

El artificio de la partición es de gran ayuda en el tratamiento de matrices muy grandes. En primer lugar al tener que multiplicar las matrices AxB , podemos partirlas en submatrices C, D, E, F, G, H, J, K que se comportan como si ellos fuesen los elementos mismos. Por ejemplo:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline E & F \end{array} \right) \quad y \quad B = \left(\begin{array}{c|c} G & H \\ \hline J & K \end{array} \right)$$

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} CG + DJ & CH + DK \\ \hline EG + FJ & EH + FK \end{array} \right)$$

En segundo lugar, si A y B ocupan demasiadas posiciones de memoria por ser demasiado grandes mientras que desde C hasta K quizás no lo sean, entonces se localizan C y G en las memorias externas y se realiza el primer producto, el cual se almacena nuevamente en memoria externa; seguidamente D y J son localizadas y se efectúa su producto. Luego se localiza el producto CG y se suma con DJ y el resultado que es la primera partición de AB se vuelve a almacenar en la memoria externa y, el proceso continúa hasta su terminación.

Ahora, sean: M = Costos de producción de los productos vendidos
 D_o = Costos directos de los departamentos operativos
 J_s = Costos indirectos totales
 N_s = Costos indirectos aplicados a los departamentos operativos

Siendo:

$$D_o = \begin{pmatrix} d_{o1} \\ d_{o2} \\ d_{o3} \\ d_{o4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 127.927.800 \\ 174.447.000 \\ 116.298.000 \\ 162.817.200 \end{pmatrix} \quad J_s = \begin{pmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ j_{s3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 131.506.200 \\ 97.064.100 \\ 84.539.700 \end{pmatrix}$$

Además, partimos de hecho de que:

$$M = D_o + N_s = D_o + x_{oi} J_s$$

esto es: “El costo de producción de los productos realmente entregados corresponde a la suma de los costos directos (D) y los costos indirectos aplicados singularmente a cada uno de los departamentos operativos”.

Y también, de que: “Los costos indirectos aplicados a los departamentos operativos son el resultado de una asignación de los costos absorbidos del presupuesto (J) de costos indirectos desde los distintos departamentos de servicio”.

$$N_s = n_s + x_s \cdot N_s = J_s \cdot y_{oi} + x_s \cdot N_s$$

O sea, en palabras: “Los costos indirectos equivalen a una cualquiera de las clases de costo más el resto, compuesto del producto de la fracción restante (x_s) por la totalidad de dichos costos indirectos aplicados (N_s)”.

Lo que también puede escribirse como:

$$x_{oi} \cdot N_s = x_{oi} \cdot n_s + x_{oi} \cdot x_s \cdot N_s = N_s \cdot y_{oi} + x_{oi} \cdot x_s \cdot N_s$$

esto es:

$$N_s \cdot (1 - x_s) = n_s = N_s \cdot (y_{oi} / x_{oi})$$

o sea:

$$(1 - y^I) = n_s / N_s = y_{oi} / x_{oi}$$

Lo cual significa que la diferencia entre la matriz identidad y la matriz transpuesta equivale a la fracción de una cualquiera clase de costo indirecto respecto del total, o también al cociente entre las fracciones de una cualquiera clase de costo asignado a uno cualquiera de los departamentos operativos y la correspondiente del costo asignado a uno cualquiera de los departamentos

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

operativos perteneciente a departamentos de servicio, ambas respecto a los costos indirectos totales asignados. (Obsérvese que la asignación fraccional horizontal “ x_s ” de costos asignados pertenecientes a los departamentos de servicio corresponde a una asignación vertical traspuesta “ y^T ” de las correspondientes clases de costo).

El escalar unidad expresado en forma de matriz también recibe el nombre de matriz Identidad. Por lo tanto, en números, podemos escribir:

$$(1-y^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0,15 & 0,15 \\ 0,10 & 0 & 0,30 \\ 0,10 & 0,15 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,15 & -0,15 \\ -0,10 & 1 & -0,30 \\ -0,10 & -0,15 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz inversa

Sin embargo, más bien nos interesa la expresión de la matriz inversa:

$$(1-y^T)^{-1} = 1 / (n_s / N_s) = 1 / (y_{oi} / x_{oi})$$

En términos aritméticos el inverso de una fracción propia significa: el tamaño de la unidad objeto de análisis. También, suele interpretarse como el número de veces que el denominador del denominador contiene al numerador del denominador.

En álgebra de matrices: *“La matriz **I**, llamada matriz identidad, es una matriz cuadrada que tiene números uno ocupando cada posición sobre la diagonal principal (de arriba hacia abajo) y al cero en todas las otras posiciones”*.

En cierto sentido, la matriz identidad **I** desempeña el mismo papel del cociente unitario que resulta de la división aritmética de un número por sí mismo. Por ello, a veces, la matriz inversa Y_s^{-1} es vista como el divisor de una división aritmética, ya que $Y_s \cdot Y_s^{-1} = I$.

“La matriz inversa de una matriz A $n \times n$ es otra matriz B $n \times n$ que tiene la propiedad de que

$$AB = BA = I$$

Aquí, B recibe el nombre de matriz inversa de A y se denota según A^{-1} . Si una matriz cuadrada A tiene una matriz inversa, se dice que A es inversible y no singular. Si A no posee una matriz inversa, entonces se dice que A es singular.

“Una matriz cuadrada tiene una matriz inversa si y solo si su reducción a la forma de ‘fila reducida’ mediante operaciones elementales de sus filas conduce a una matriz que tenga unos en todos los elementos de su matriz principal” (Bronson, 1991).

Las matrices reducidas a la forma de fila reducida, son indispensables para la solución de ecuaciones lineales simultáneas y también para elaborar algoritmos eficientes utilizados en la ejecución de todas las operaciones con matrices.

“La reducción de una matriz cuadrada a la forma de fila reducida consiste en adicionar a una fila de la matriz, otra fila de la misma matriz multiplicada por un escalar, hasta que todos los elementos por debajo de la diagonal principal sean cero y después, comenzando con la última columna y desplazándose secuencialmente hacia la primera columna, obteniendo ceros en todas las posiciones por encima de la diagonal de los elementos unitarios”.

Una matriz reducida a la forma de fila reducida debe satisfacer las siguientes cuatro condiciones:

- Todas las filas “cero” aparecen por debajo de las filas “distintas de cero” cuanto ambos tipos hacen parte de la matriz

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

- El primer elemento distinto de cero en cualquier fila distinta de cero es la unidad.
- El primer elemento distinto de cero perteneciente a una fila distinta de cero, situado directamente por debajo (es decir, en la misma columna pero a partir de filas sucesivas) es cero.
- El primer elemento distinto de cero perteneciente a una fila distinta de cero aparece en una columna posterior a la derecha del primer elemento distinto de cero de cualquier fila precedente.

Entonces, para invertir la matriz $(1-y^T)$, nos valemos del siguiente procedimiento:

- Construimos una matriz aumentada, anotando una matriz identidad en partición horizontal al lado derecho de la matriz original

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0,15 & -0,15 & 1 & 0 & 0 \\ -0,10 & 1 & -0,30 & 0 & 1 & 0 \\ -0,10 & -0,15 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

- Sumamos a la segunda fila la primera multiplicada por (0,10)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0,150 & -0,150 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,985 & -0,315 & 0,10 & 1 & 0 \\ -0,10 & -0,15 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

- Sumamos a la tercera fila la primera multiplicada por (0,10)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0,150 & -0,150 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,985 & -0,315 & 0,10 & 1 & 0 \\ 0 & -0,165 & 0,985 & 0,10 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

- Dividimos la segunda fila por (0,985)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0,150 & -0,1500 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,3198 & 0,1015 & 1,0152 & 0 \\ 0 & -0,165 & 0,9850 & 0,1000 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

- Sumamos a la primera fila la segunda multiplicada por (0,15)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0,1980 & 1,0152 & 0,1523 & 0 \\ 0 & 1 & -0,3198 & 0,1015 & 1,0152 & 0 \\ 0 & -0,165 & 0,9850 & 0,1000 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

- Sumamos a la tercera fila la segunda multiplicada por (0,165)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0,1980 & 1,0152 & 0,1523 & 0 \\ 0 & 1 & -0,3198 & 0,1015 & 1,0152 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9322 & 0,1168 & 0,1675 & 1 \end{array} \right]$$

- Dividimos la tercera fila por (0,9322)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0,1980 & 1,0152 & 0,1523 & 0 \\ 0 & 1 & -0,3198 & 0,1015 & 1,0152 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,1252 & 0,1797 & 1,0727 \end{array} \right]$$

Hasta aquí, la matriz original ha adquirido la forma de fila reducida, por lo tanto sabemos que se trata de una matriz inversible, pues presenta una diagonal principal de solos unos como elementos. Continuando entonces con el proceso de inversión, tendremos:

- Sumamos a la segunda fila la tercera multiplicada por (0,3198)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0,1980 & 1,0152 & 0,1523 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,1416 & 1,0727 & 0,3430 \\ 0 & 0 & 1 & 0,1252 & 0,1797 & 1,0727 \end{array} \right]$$

- Sumamos a la primera fila la tercera multiplicada por (0,1980)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1,0400 & 0,1879 & 0,2124 \\ 0 & 1 & 0 & 0,1416 & 1,0727 & 0,3430 \\ 0 & 0 & 1 & 0,1252 & 0,1797 & 1,0727 \end{array} \right]$$

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Por lo tanto, la matriz invertida es:

$$(1-y^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,0400 & 0,1879 & 0,2124 \\ 0,1416 & 1,0727 & 0,3430 \\ 0,1252 & 0,1797 & 1,0797 \end{pmatrix}$$

Ahora, para obtener la distribución de cada clase de costo en la formación del costo departamental, nos valemos del producto:

$$y_{oi} \cdot (1-y^T)^{-1} = x_{oi}$$

En números, esto es:

$$\begin{pmatrix} 0,15 & 0,15 & 0,15 \\ 0,10 & 0,20 & 0,30 \\ 0,30 & 0,15 & 0,20 \\ 0,15 & 0,10 & 0,10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,0400 & 0,1879 & 0,2124 \\ 0,1416 & 1,0727 & 0,3430 \\ 0,1252 & 0,1797 & 1,0797 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1960 & 0,2160 & 0,2442 \\ 0,1699 & 0,2872 & 0,4117 \\ 0,3583 & 0,2532 & 0,3297 \\ 0,1827 & 0,1534 & 0,1734 \end{pmatrix}$$

De tal modo que la contribución monetaria de cada clase de costo a la acumulación del costo departamental estará dado según:

$$x_{oi} \cdot J_s = N_s$$

Esto es:

$$\begin{pmatrix} 0,1960 & 0,2160 & 0,2442 \\ 0,1699 & 0,2872 & 0,4117 \\ 0,3583 & 0,2532 & 0,3297 \\ 0,1827 & 0,1534 & 0,1734 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 131.506.200 \\ 97.064.100 \\ 84.539.700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69.052.161 \\ 87.127.440 \\ 102.030.030 \\ 54.900.369 \end{pmatrix}$$

En ocasiones, se hace necesario introducir factores de corrección o ajustes

para compensar los efectos de las aproximaciones en trabajo con operaciones fraccionarias. Finalmente, el costo total de producción vendrá dado por la suma de los costos directos más los costos indirectos departamentales, esto es:

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}_o + \mathbf{N}_s = \begin{pmatrix} 127.927.800 \\ 174.447.000 \\ 116.298.000 \\ 162.817.200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 69.052.161 \\ 87.127.440 \\ 102.030.030 \\ 54.900.369 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 196.979.961 \\ 261.574.440 \\ 218.328.030 \\ 217.717.569 \end{pmatrix}$$

Aquí, para efectos de comparación con los otros rubros, se hace necesario convertir la matriz M en un vector fila mediante la expresión:

$$U.M = M^T$$

$$\mathbf{M}^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1] \times \begin{pmatrix} 196.979.961 \\ 261.574.440 \\ 218.328.030 \\ 217.717.569 \end{pmatrix} = [196.979.961 \ 261.574.440 \ 218.328.030 \ 217.717.569]$$

Lo cual es susceptible de sumar para conocer el valor del costo de producción total:

$$[196.979.961 \ 261.574.440 \ 218.328.030 \ 217.717.569] = \$ 894.600.000$$

Ahora, siguiendo como veníamos:

f) Para conocer el valor de las Utilidades, primero hallamos la Utilidad Bruta y posteriormente la Utilidad Operacional, así:

$$\text{UTILIDAD BRUTA} = \text{INGRESOS} - \text{COSTO DE PRODUCCIÓN}$$

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

$$\begin{aligned} & [361.200.000 \quad 468.000.000 \quad 507.110.000 \quad 123.200.000] = 1.459.510.000 \\ & - [196.979.961 \quad 261.574.440 \quad 218.328.030 \quad 217.717.569] = 894.600.000 \\ & = [164.220.039 \quad 206.425.560 \quad 288.781.970 \quad -94.517.569] = 564.910.000 \end{aligned}$$

**UTILIDAD BRUTA – GASTOS OPERACIONALES = UTILIDAD ANTES
DE IMPUESTOS**

$$564.910.000 - 366.000.000 = \$ 198.910.000$$

II. El modelo de las cadenas de Markov para la provisión de cuentas incobrables

Definiciones y notación básica

Aquí estamos tratando el problema de proveer una adecuada provisión para cuentas incobrables. La esencia del problema de las cuentas de dudoso cobro es estimar los flujos netos futuros de realización de las cuentas por cobrar, permitiendo incluir sistemáticamente la incertidumbre que es inherente a todo problema de estimación.

El proceso de creación de una provisión para cuentas incobrables cumple un número finito de estados simples y en condiciones estacionarias de transición, muy similar al modelo matemático conocido como Análisis o Cadenas de Markov. Si las cadenas de Markov pueden ayudar a evaluar esta probabilidad, ellas serán claramente pertinentes a este problema de valoración contable (Shank, 1972).

El análisis de Markov es una técnica que maneja las probabilidades de ocurrencias futuras mediante el análisis de las probabilidades conocidas en el presente. El análisis se basa en el supuesto de que el sistema comienza en un estado o condición inicial y la predicción de su ubicación en algún estado futuro implica conocer las posibilidades del sistema o la probabilidad de cambiar de un estado a otro (Thierauf, 1995). Estas probabilidades pueden reunirse y

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

colocarse dentro de una matriz o una tabla. Esta matriz de probabilidades de transición muestra la posibilidad de que el sistema cambie de un periodo al siguiente.

Por lo general, los sistemas de cuentas por cobrar clasifican las deudas o cuentas por cobrar de sus clientes en una o varias categorías de estado, que se agrupan según el grado de retraso de la cuenta más antigua que no se haya pagado. Por supuesto las categorías o estados exactos dependen de la política fijada por cada compañía.

Considere el proceso de recolección de cuentas por cobrar en un almacén por departamentos hipotético.

Tabla 7. Conformación de la cartera por ventas a crédito

Estados de cuentas	Cambios en el periodo	
	Ganancias	Pérdidas
A. Facturas pagadas al contado	700	700
B. Vencidas menos de un mes	700	518
C. Vencidas entre uno y tres meses	518	380
D. Vencidas más de tres meses	380	240
E. Incobrables y dadas de baja	240	240

S. Pérez, 2013. Elaboración propia

Un estado de un proceso o de un sistema es el conjunto de condiciones que hacen posible su existencia en un momento dado. Los estados son colectivamente exhaustivos a la vez que mutuamente excluyentes. La primera propiedad nos permite listar todos los estados posibles de un proceso o sistema, mientras que la segunda propiedad supone la presencia de un estado único en un momento dado.

Al igual que cualquier otro proceso de Markov, se puede establecer una matriz de probabilidades de transición de estos cuatro estados. Esta matriz reflejará

la propensión de las facturas a ser clasificadas entre las cuatro categorías de cuentas por cobrar de un mes al siguiente.

En cualquier periodo de tiempo, digamos un mes, una factura puede encontrarse en alguno de estos cuatro estados. La probabilidad de toda factura sobre algún artículo comprado en este mes que haya sido pagada es de 100 % o uno (700/700). Igual sucede si una factura no se paga en tres meses, pues la compañía la declarará como cuenta incobrable y la probabilidad de permanecer en dicha categoría para siempre es de 100 % o uno (240/240), solo que en ambos casos tal clasificación se hará de un tajo al final de cada mes.

Es por ello que estas dos categorías (A y E), que solamente son observadas a intervalos fijos y periódicos de un mes, reciben el nombre de categorías absorbentes, queriendo decir con ello que, la probabilidad hacia el futuro de las facturas en tales estados es uno y la probabilidad de que se encuentre en cualquier otro estado es cero.

Tabla 8. Cambios en el número de facturas del periodo

Cat.	Ganancias					Pérdidas				
	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
A	700	10	0	15	0	700	5	10	20	0
B	0	620	35	25	0	0	488	5	20	0
C	0	25	468	15	0	0	10	330	20	0
D	0	20	0	310	0	0	5	20	160	0
E	0	25	15	15	240	0	10	15	20	240
	700	700	518	380	240	700	518	380	240	240

S. Pérez, 2013. Elaboración propia

No así ocurre con los otros estados que reciben el nombre de transientes (o no absorbentes), cuyo camino a través del cual se mueve durante su vida, desde la categoría dos (donde comienza) a lo largo de uno o más de los otros estados hasta finalmente alcanzar la categoría uno o la cinco, es visto aquí como una variable probabilística.

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Si un cliente adeuda varias facturas, habrá la tendencia a clasificar su cuenta a través de la factura más antigua sin pagar, o sea que si tal factura tiene un retraso entre uno y tres meses, automáticamente al cliente se le considera ubicado en la categoría C, pero en realidad, a medida que transcurre el mes, las facturas van siendo reclasificadas hacia sus respectivas categorías dando lugar a dos clases de registros, tanto a los registros permanentes al final de cada mes de facturas provenientes de la categoría anterior como a registros de intercambio provenientes de las más diversas categorías en reclasificación de las facturas de los clientes tan pronto como alcance tal estado según la antigüedad.

Cuando la probabilidad de los acontecimientos futuros depende tan solo de los resultados del último periodo, se dice que la cadena de Markov es de primer orden, no así ocurre cuando son considerados los resultados de los dos periodos, como en el siguiente caso, cuyos guarismos se leen de modo horizontal:

Tabla 9. Cambios en el número de clientes durante el periodo

	Cant.	Ganancias					Pérdidas					Cant.
		A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	
A	0	700	0	0	0	0	420	100	95	85	0	0
B	132	10	488	25	20	25	5	488	10	5	10	182
C	138	0	35	330	0	15	10	5	330	20	15	138
D	150	15	25	15	160	15	20	20	20	160	20	140
E	0	85	75	65	15	0	0	0	0	0	240	0
	420	530	623	435	195	55	455	613	455	270	285	460

S. Pérez, 2013. Elaboración propia

La Tabla anterior se hace más inteligible representando sus movimientos en la forma de cuentas T, lo cual requeriría incluir la simulación de cuentas para efectivo y ventas.

La construcción del modelo

Las probabilidades de transición se definen como la probabilidad de que deter-

minada cuenta provenga en estado de intercambio o en estado de permanencia y en tratándose de los clientes, la probabilidad de su forma de pago. Estos cálculos se muestran en el siguiente cuadro:

Cuadro 3. Probabilidad en estados de Intercambio o de Permanencia

	A	B	C	D	E
A	700/700 = 1	10/700 = 0,014	0/518 = 0	15/380 = 0,039	0
B	0	620/700 = 0,886	35/518 = 0,068	25 /380 = 0,067	0
C	0	25/700 = 0,036	468/518 = 0,903	15/380 = 0,039	0
D	0	20/700 = 0,028	0/518 = 0	310/380 = 0,816	0
E	0	25/700 = 0,036	15/518 = 0,029	15/380 = 0,039	240/240 = 1
TOTAL	1	1,000	1,000	1,000	1

S. Pérez, 2013. Elaboración propia

El examen de los datos muestra que la solución de una matriz 5x5 puede ser algo complicado. Con base en sus características particulares, pudiera resultar conveniente organizar un arreglo en el que se escriban primero los estados absorbentes y luego los estados transientes. En efecto, realizado esto y luego transponiendo los datos de filas y columnas logramos darle a la matriz el aspecto de una partición:

Cuadro 4. Matriz de partición de las probabilidades de los estados de transición

	A	E	B	C	D
A	1	0	0	0	0
E	0	1	0	0	0
B	0,014	0,036	0,886	0,036	0,028
C	0	0,029	0,068	0,903	0
D	0,039	0,039	0,067	0,039	0,816

S. Pérez, 2013. Elaboración propia

Ahora, denotaremos las particiones de esta matriz así:

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{I} & \text{O} \\ \hline \text{J} & \text{X} \end{array} \right)$$

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

En donde **I** es una matriz identidad 2x2, **0** es una matriz cero 2x3, **J** es una matriz 3x2 y **X** es una matriz 3x3, esto es:

$$\mathbf{I} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} \begin{bmatrix} 0,014 & 0,036 \\ 0 & 0,029 \\ 0,039 & 0,029 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} \begin{bmatrix} 0,886 & 0,036 & 0,028 \\ 0,068 & 0,903 & 0 \\ 0,067 & 0,039 & 0,816 \end{bmatrix}$$

Sea también, j_{ac} la probabilidad de que una factura no pagada concluya en el estado absorbente E, dado que ahora se encuentra en la categoría de edad del estado A. Puesto que las facturas pueden hacer parte de un estado absorbente x_{ak} , o también, haber estado transitando desde un estado transiente cualquiera x_{ak} a otro hasta n_{ke} desde donde puede ser absorbida, es posible expresar el universo n_{ae} en términos de la siguiente suma de probabilidades:

$$n_{ae} = j_{ac} + \sum x_{ak} \cdot n_{ke}$$

En esta notación j_{ac} y x_{ak} se refieren a los elementos de las correspondientes particiones **J** y **X** escindidas de la matriz de transición. En notación matricial, esto es lo mismo que:

$$N = J + [X.N]$$

de donde $(I - X).N = J$

y mejor aún: $N = [I-X]^{-1}.J$

Ahora, en números, esto es:

$$(I-X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,886 & 0,036 & 0,028 \\ 0,068 & 0,903 & 0 \\ 0,067 & 0,039 & 0,816 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,114 & -0,036 & -0,028 \\ -0,068 & 0,097 & 0 \\ -0,067 & -0,039 & 0,184 \end{bmatrix}$$

cuya matriz inversa es la matriz fundamental **F**:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{I} - \mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 13,4396 & 5,8102 & 2,0452 \\ 9,4216 & 14,3824 & 1,4337 \\ 6,8908 & 5,1641 & 6,4834 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar la matriz fundamental **F** por la matriz **J**, la nueva matriz **N** indica la probabilidad de que cualquier cantidad de recursos colocada en alguno de los estados transientes termine en alguno de los estados absorbentes.

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{J} = (\mathbf{I} - \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{N}$$

Esto es en números:

$$\begin{bmatrix} 13,4 & 5,8 & 2,0 \\ 9,4 & 14,4 & 1,4 \\ 6,9 & 5,2 & 6,5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,014 & 0,036 \\ 0 & 0,029 \\ 0,039 & 0,029 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,268 & 0,712 \\ 0,188 & 0,798 \\ 0,349 & 0,586 \end{bmatrix}$$

De tal modo la fila superior de esta matriz indica que las probabilidades de una cantidad, cuyo vencimiento sea menor a un mes: de que se pague es 0,268 y de que termine como una deuda incobrable es 0,712. Para la segunda fila, la probabilidad de una deuda vencida entre uno y tres meses es 0,188 de que se pague y 0,798 de que termine como deuda incobrable. La tercera fila, indica que 0,349 es la probabilidad de que una cantidad cuyo vencimiento sea de más de tres meses finalmente se pague y, 0,586 es la probabilidad de que una cantidad en esa categoría nunca se pague y se convierta en una deuda incobrable.

La provisión de cuentas incobrables

Ahora, si según las notas explicativas del balance general, se conoce la cantidad en dinero de la categoría menor a un mes, de la categoría entre uno y tres meses y de la categoría vencida por más de tres meses, se puede determinar la cantidad de dinero que se recibirá tanto de las cobranzas como de la que

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

se convertirá en una deuda incobrable. En este caso, la matriz **Y** representa la cantidad de dinero que se encuentra en cada uno de los estados transientes de la siguiente forma:

$$Y = [Y1, Y2, Y4 \dots Yn]$$

Siendo n = número de estados transientes

Y1 = cantidad en el primer estado categoría

Y2 = cantidad en el segundo estado categoría

Yn = cantidad en el estado categoría n

Suponga que existen \$ 3.700.000 en la categoría de menos de un mes, \$ 15.500.000 en la categoría de entre uno y tres meses y \$ 8.800.000 en la categoría de más de tres meses. Entonces, la contribución monetaria de cada categoría de transición a la provisión para cuentas cobrables e incobrables estará dada según:

$$Y.N = [3.700.000 \quad 15.500.000 \quad 8.800.000] \times \begin{pmatrix} 0,268 & 0,712 \\ 0,188 & 0,798 \\ 0,349 & 0,586 \end{pmatrix} = [6.976.800 \quad 20.160.000]$$

Que como puede verse, el producto Y.N es un vector 1x2 cuyos elementos significan respectivamente: \$ 6.976.800 de colecta de las cuentas por cobrar a clientes y \$ 20.160.000 de las cuentas dadas de baja para formar la provisión para las cuentas incobrables.

III. Modelo de contabilidad agregativa en espacios vectoriales

La contabilidad agregativa en espacios vectoriales (Mattesich, 1972) a veces también denominada contabilidad matricial (García, 1975), es un modelo contable diferente al de la partida doble que consiste en una instrumentación de la información contable mediante la inscripción de los valores asignados a los hechos contables en la intersección de filas y columnas (Bronson, 1994) de una matriz cuadrada (Render *et al.*, 2010).

Definiciones y notación básica

Una matriz cuadrada es una disposición o arreglo numérico que contiene igual número de filas horizontales y de columnas verticales en cuya intersección se inscriben elementos de información.

La ventaja más inmediata que ofrece la contabilidad matricial es que la relación biunívoca creada entre dos cuentas puede ser representada mediante una sola anotación, simbolizada en lógica matemática mediante un par ordenado (d,h) , cuya pertinencia a la columna corresponde al debe (D) mientras la pertinencia a la fila corresponde al haber (H).

En una matriz cuadrada con un número C de columnas y un número F de filas, donde $C = F$, se pueden inscribir $[(C)(F) - (C)]$ transacciones. Esto se entiende

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

si admitimos que en una transacción ninguna cuenta se interrelaciona consigo misma. En la primera de las siguientes dos matrices, ha sido representada una matriz de transacciones en las que siempre intervienen dos cuentas diferentes entre sí. Como puede verse, el vector diagonal siempre tendrá como valor asociado el número cero.

Tabla 10. Combinaciones posibles de cuentas

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	BA	CA	DA	EA	FA	GA
B	AB	0	CB	DB	EB	FB	GB
C	AC	BC	0	DC	EC	FC	GC
D	AD	BD	CD	0	ED	FD	GD
E	AE	BE	CE	DE	0	FE	GE
F	AF	BF	CF	DF	EF	0	GF
G	AG	BG	CG	DG	EG	FG	0

S. Pérez, 2013. Elaboración propia

Para mostrar los procedimientos de inscripción de la información en la contabilidad matricial, tomemos como ejemplo a una empresa comercial que como primer paso, adopta el siguiente Plan de cuentas, en el que aplica nombres y códigos arbitrarios a sus cuentas contables:

Tabla 11. Plan de cuentas

Nombre de la cuenta	Código
Caja	CJ
Inventario	IT
Maquinaria	MQ
Proveedores	PR
Depreciaciones	DP
Capital	CP
Ingresos	IG
Costos y Gastos	CO
Pérdidas y Ganancias	PG
Resultado	RS

S. Pérez, 2013. Elaboración propia

La inscripción de la información

El siguiente paso es el de la inscripción de las transacciones en una bitácora o libro diario. La inscripción de la información en contabilidad matricial tiene su propio formato, sin embargo, en términos legales, se trata de un formato informal. Esto significa que el uso de este modelo contable no exime de la obligación de presentar la información contable como lo establece el Código de Comercio. En otras palabras, las transacciones son hechos económicos que deben ser transformados en hechos o actos contables, con capacidad de verificación y de generación de pruebas cuando fuere pertinente.

Los hechos contables pues, inician tras la incorporación formal en la contabilidad de aquellos sucesos comerciales puntuales de autenticidad protegida, siguiendo para ello un plan contable previamente establecido y una metodología de registro de la información, que puedan servir de identificación de aquellas variaciones en las cuentas de la empresa o institución, de tal manera que se registren de modo apropiado en las cuentas adecuadas. Es a partir de la utilización de la información contable para analizar los movimientos de la riqueza involucrada por los emprendimientos humanos, cuando se hacen distinguibles los cambios patrimoniales como el objeto de la ciencia de la contabilidad.

El procedimiento técnico de inscripción de la información en una matriz, requiere el desdoblamiento de las transacciones “compuestas” en transacciones más sencillas, cuya suma de inscripciones “simples” equivalga a la transacción completa. Este es precisamente, el motivo de la utilización de “comodines” o cuentas “diversas”, tales como Otros Gastos, Dividendos por Pagar, Pérdidas y Ganancias, Utilidad o Pérdida en Venta o Retiro de Bienes, etc. Muchas veces no hay una manera única de segmentar el asiento compuesto pero se debe tener cuidado en la obtención de los totales correctos.

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Supongamos que la empresa comercial de la referencia ha efectuado las siguientes transacciones, que dan lugar a la siguiente confección de los asientos de diario.

a. *El empresario aporta al negocio \$ 100 en efectivo y \$ 200 representado en una maquinaria*

Solución: Una manera, aparentemente lógica, para registrar esta primera transacción es el registro por separado del aporte en efectivo y del aporte en maquinaria, así:

a1.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
		Caja	100	
		Capital		100

a2.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
		Maquinaria	200	
		Capital		200

b. *Compra a crédito 1000 Kg de mercancías por \$ 400*

Solución: La segunda transacción, que al parecer es más sencilla, está representada por el siguiente asiento:

b1.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
		Inventario	400	
		Proveedores		400

c. *Vende 500 Kg de mercancías por \$ 300*

Solución: Nuevamente, la tercera transacción requiere de su desdoblamiento en dos registros más sencillos, el de la venta propiamente dicha y la salida de las mercancías del inventario:

c1.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
		Caja	300	
		Ingresos		300

c2.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
		Costos y Gastos	200	
		Inventario		200

d. *Paga \$ 20 por concepto de salarios*

Solución: La cuarta transacción requiere un asiento de registro sencillo:

d1.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
		Costos y Gastos	20	
		Caja		20

e. *Vende 500 Kg de mercancías por \$ 180*

Solución: La quinta transacción es similar a la tercera (c):

e1.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
		Caja	180	
		Ingresos		180

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

e2.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
		Costos y Gastos	200	
		Inventario		200

f. *Hace nueva aportación de capital por \$ 50*

Solución: La sexta transacción requiere un asiento de registro sencillo:

f1.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
		Caja	50	
		Capital		50

g. *Compra 200 Kg de mercancías por \$ 100*

Solución: Igualmente, la séptima transacción requiere un asiento de registro sencillo:

g1.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
		Inventario	100	
		Caja		100

h. *Vende 100 Kg de mercancías por \$ 70*

Solución: La octava transacción es similar a la tercera (c):

h1.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
		Caja	70	
		Ingresos		70

h2.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
		Costos y Gastos	50	
		Inventario		50

i. *Vende 50 Kg de mercancías por \$ 40*

Solución: Igualmente, la novena transacción es similar a la tercera (c):

i1.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
		Caja	40	
		Ingresos		40

i2.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
		Costos y Gastos	25	
		Inventario		25

j. *Abona \$ 100 a obligaciones con proveedores*

Solución: La décima transacción requiere un asiento de registro sencillo:

j1.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
		Proveedores	100	
		Caja		100

k. *Paga servicios públicos por \$ 3*

Solución: La décima primera transacción también requiere un asiento de registro sencillo:

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

k1.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
		Costos y Gastos	3	
		Caja		3

l. *Retira parte del capital por \$ 20*

Solución: Igualmente, la décima segunda transacción requiere un asiento de registro sencillo:

l1.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
24/08/20xx		Capital	20	
		Caja		20

La mayorización de los registros

Siguiendo el mismo orden de los asientos anteriores, la mayorización toma el siguiente aspecto:

Asiento a l

	CJ	IT	MQ	PR	CP	IG	CO
CJ							
IT							
MQ							
PR							
CP	100						
IG							
CO							

Asiento a2

	CJ	IT	MQ	PR	CP	IG	CO
CJ							
IT							
MQ							
PR							
CP			200				
IG							
CO							

Asiento b1

	CJ	IT	MQ	PR	CP	IG	CO
CJ							
IT							
MQ							
PR		400					
CP							
IG							
CO							

Asiento c1

	CJ	IT	MQ	PR	CP	IG	CO
CJ							
IT							
MQ							
PR							
CP							
IG	300						
CO							

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Asiento c2

	CJ	IT	MQ	PR	CP	IG	CO
CJ							
IT							200
MQ							
PR							
CP							
IG							
CO							

Asiento d1

	CJ	IT	MQ	PR	CP	IG	CO
CJ							20
IT							
MQ							
PR							
CP							
IG							
CO							

Asiento e1

	CJ	IT	MQ	PR	CP	IG	CO
CJ							
IT							
MQ							
PR							
CP							
IG	180						
CO							

Asiento e2

	CJ	IT	MQ	PR	CP	IG	CO
CJ							
IT							200
MQ							
PR							
CP							
IG							
CO							

Asiento f1

	CJ	IT	MQ	PR	CP	IG	CO
CJ							
IT							
MQ							
PR							
CP	50						
IG							
CO							

Asiento g1

	CJ	IT	MQ	PR	CP	IG	CO
CJ		100					
IT							
MQ							
PR							
CP							
CO							
IG							

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Asiento h1

	CJ	IT	MQ	PR	CP	IG	CO
CJ							
IT							
MQ							
PR							
CP							
IG	70						
CO							

Asiento h2

	CJ	IT	MQ	PR	CP	IG	CO
CJ							
IT							50
MQ							
PR							
CP							
IG							
CO							

Asiento i1

	CJ	IT	MQ	PR	CP	IG	CO
CJ							
IT							
MQ							
PR							
CP							
IG	40						
CO							

Asiento i2

	CJ	IT	MQ	PR	CP	IG	CO
CJ							
IT							25
MQ							
PR							
CP							
IG							
CO							

Asiento j1

	CJ	IT	MQ	PR	CP	IG	CO
CJ				100			
IT							
MQ							
PR							
CP							
IG							
CO							

Asiento k1

	CJ	IT	MQ	PR	CP	IG	CO
CJ							3
IT							
MQ							
PR							
CP							
IG							
CO							

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Asiento 11

	CJ	IT	MQ	PR	CP	IG	CO
CJ					20		
IT							
MQ							
PR							
CP							
IG							
CO							

Hasta aquí, estas “matrices de transacciones” muestran el movimiento de las cuentas.

Luego de que los datos de las transacciones han sido completamente inscritos en la matriz del mayor, el siguiente paso es el de su agregación para conformar el Balance de Comprobación no ajustado.

Supongamos que las agregaciones de los asientos de registro de las transacciones hayan ido configurando la siguiente matriz acumulada:

Matriz Acumulada de Transacciones

	CJ	IT	MQ	PR	CP	CO	IG	PG	RS
CJ		100		100	20	23			
IT						475			
MQ									
PR		400							
CP	150		200						
CO									
IG	590								
PG									
RS									

Si estuviésemos considerando únicamente la primera columna, tendremos que la suma de todas las j -ésimas filas representantes de todos los débitos de la cuenta número 1, estará dada por el vector fila D_{ij} , en la cual “ j ” es el número del elemento en el Plan de cuentas e “ i ” es el número de orden correspondiente a cada cuenta bajo consideración:

$$D_{ij} = \sum_{j=1}^7 (d_{ij}) = [d_{11} + d_{12} + \dots + d_{1i}] \rightarrow [740]$$

$$\text{Esto es: } D_{ij} = d_{15} + d_{17} = 150 + 590 = 740$$

Del mismo modo, al ubicarnos sobre la primera fila, la suma de todas las i -ésimas columnas representantes de todos los créditos de la cuenta número 1, estará dada por el vector columna H_{ij} , en la cual “ i ” es el número de orden correspondiente a la cuenta bajo consideración y “ j ” es el número de cada elemento en el Plan de cuentas, por lo tanto, tendremos:

$$H_{ji} = \sum_{i=1}^7 (h_{ji}) = [h_{11} + h_{21} + \dots + h_{j1}] \rightarrow [243]$$

O sea que considerando apenas la primera línea, tendremos:

$$H_{ij} = h_{21} + h_{41} + h_{51} + h_{61} = 100 + 100 + 20 + 23 = 243$$

Así, podemos establecer que una matriz de transacciones acumulada está constituida por vectores pertenecientes a dos semiespacios vectoriales: el semiespacio vectorial D (el del vector DEBE) y el semiespacio vectorial H (del vector HABER), ambos con siete dimensiones en nuestro ejemplo. La sumatoria de los elementos inscritos en las columnas conforma el vector D y la sumatoria de los elementos de las filas el vector H.

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Balance de Comprobación

	CJ	IT	MQ	PR	CP	IG	CO	Vector H
CJ								243
IT								475
MQ								0
PR								400
CP								350
IG								590
CO								0
Vector D	740	500	200	100	20	0	498	

Los procedimientos de ajuste y cierre

El siguiente paso es la inscripción de los asientos de ajuste. Para ilustrar estos procedimientos de inscripción de la información, tomemos como ejemplo el asiento de ajuste periódico por la alícuota de depreciación de la maquinaria por valor de \$ 2. El asiento de ajuste será:

m1.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
30/08/20xx		Costos y Gastos	2	
		Maquinaria		2

La mayorización de cada nuevo procedimiento, ya sea de ajuste, eliminación o cierre debe efectuarse sobre la última “Matriz del Balance de Comprobación”, también denominada “Matriz de Apertura”. Es de advertir que con la utilización de nuevas cuentas se va observando la ampliación de la matriz con nuevas columnas y filas en uso, de modo que en nuestro caso, al crear la cuenta de Depreciaciones (DP), la nueva matriz acumulada ajustada será:

Matriz de Transacciones Acumulada Ajustada

	CJ	IT	MQ	DP	PR	CP	CO	IG	PG	RS
CJ		100			100	20	23			
IT							475			
MQ										
DP							2			
PR		400								
CP	150		200							
CO										
IG	590									
PG										
RS										

Terminado el proceso de ajustes, nuevamente tendremos que la sumatoria de los elementos inscritos en las columnas conforma el vector D y la sumatoria de los elementos de las filas conforma el vector H, con lo que nuestra nueva matriz ajustada de transacciones será:

Balance de Comprobación Ajustado

	CJ	IT	MQ	DP	PR	CP	IG	CO	Vector H
CJ									243
IT									475
MQ									0
DP									2
PR									400
CP									350
IG									590
CO									0
Vector D	740	500	200	0	100	20	0	500	

El siguiente paso es el cierre del periodo. Para ilustrar estos procedimientos de cierre, por simpleza, solo llegaremos hasta el conocimiento de la utilidad operacional, así:

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

n1.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
24/08/20xx		Ingresos	590	
		Pérdidas y Ganancias		590

n2.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
		Pérdidas y Ganancias	500	
		Costos y Gastos		500

n3.

Fecha	Código	Nombre de la cuenta	Debe	Haber
		Pérdidas y Ganancias	90	
		Resultados		90

En consecuencia, la nueva matriz de transacciones acumulada será:

Matriz de Transacciones Acumulada Ajustada al Cierre

	CJ	IT	MQ	DP	PR	CP	CO	IG	PG	RS
CJ		100			100	20	23			
IT							475			
MQ										
DP							2			
PR		400								
CP	150		200							
CO									500	
IG	590									
PG								590		
RS									90	

Al finalizar, nuevamente obtenemos el Balance de Comprobación Ajustado y al Cierre, mediante la sumatoria de los elementos inscritos en las columnas

que conforman el vector D y la sumatoria de los elementos de las filas que conforman el vector H.

Balance de Comprobación Ajustado al Cierre

	CJ	IT	MQ	DP	PR	CP	IG	CO	PG	RS	Vector H
CJ											243
IT											475
MQ											0
DP											2
PR											400
CP											350
IG											590
CO											500
PG											590
RS											90
Vector D	740	500	200	0	100	20	590	500	590	0	

El vector de saldos de la matriz de balance

Para poder calcular un vector de saldos de una matriz de balance, es necesario transformar alguno de los vectores dados para que ambos sean horizontales o verticales.

En álgebra matricial se tiene que:

- *“La multiplicación de matrices solamente está definida si el número de columnas de la matriz de la izquierda en cada producto posible, es igual al número de filas de la matriz de la derecha”.*
- *“Se llama matriz traspuesta a otra matriz obtenida mediante la trasposición de los papeles entre las filas y las columnas de determinada matriz original (H)”.*
- *“Un vector traspuesto puede obtenerse mediante la multiplicación de un vector columna original (H), o un vector fila original (D) por un vector fila o columna (U) compuesto de ‘unos’”.*

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

En consecuencia, conocido el vector columna H, podemos convertirlo en un vector fila mediante la expresión:

$$U.H = H^t$$

Esto es:

$$(1,1,1,1,1,1,1,1,1) \begin{array}{|l} 243 \\ 475 \\ 0 \\ 2 \\ 400 \\ 350 \\ 500 \\ 590 \\ 590 \\ 90 \end{array} = (243 + 475 + 0 + 2 + 400 + 20 + 350 + 500 + 590 + 590 + 90)$$

Hecha esta transformación, se hace posible calcular el “Vector de Saldos” (S) de la matriz de balance del siguiente modo:

$$D - H^t = S \text{ (Fórmula de Kemeny)}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}: & (740 + 500 + 200 + 0 + 100 + 20 + 590 + 500 + 590 + 0) \\ - \mathbf{H}^t: & - (243 + 475 + 0 + 2 + 400 + 350 + 590 + 500 + 590 + 90) \\ = \mathbf{S}: & [497 + 25 + 200 + (2) + (300) + (330) + 0 + 0 + 0 + (90)] \end{aligned}$$

En contabilidad cada saldo “S_i” se dice “deudor” si es positivo o “acreedor” si es negativo y “nulo, equilibrado o saldado” si es cero. Aquí entonces, los saldos positivos corresponden a las cuentas del Activo, mientras que los saldos negativos corresponden a las cuentas del Pasivo.

En el caso de requerirse la misma información pero en un formato vertical, que es el caso más usual, puede aplicarse la expresión:

$$D.U = D^t$$

Esto es:

$$(243 + 475 + 0 + 2 + 400 + 20 + 350 + 590 + 500 + 590 + 90) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 243 \\ 475 \\ 0 \\ 2 \\ 400 \\ 350 \\ 590 \\ 590 \\ 500 \\ 590 \\ 90 \end{pmatrix}$$

Hecha esta transformación, se hace posible calcular el “Vector de Saldos” (Sⁱ) del siguiente modo:

$$(D - H^i).U = D^i - H = S^i$$

En consecuencia, la llamada Matriz de Balance (Dⁱ - H) y el “Vector de Saldos” (Sⁱ) se puede escribir verticalmente, del siguiente modo:

CUENTAS	VECTOR DEBE (D ⁱ)	VECTOR HABER (H)	VECTOR SALDO (S ⁱ)
Caja	740	243	497
Inventario	500	475	25
Maquinaria	200	0	200
Depreciaciones	0	2	(2)
Proveedores	100	400	(300)
Capital	20	350	(330)
Ingresos	590	590	0
Costos y Gastos	500	500	0
Pérdidas y Ganancias	590	590	0
Resultados	0	90	(90)
	<u>3.240</u>	<u>3.240</u>	<u>0</u>

Al transformar la matriz en un conjunto de vectores, podemos establecer una

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

relación matemática directa y precisamente proporcional entre las contribuciones individuales de las cuentas y su correspondiente semiespacio vectorial, que puede dar origen a diversos sistemas de ecuaciones y desigualdades lineales simultáneas, muy propicios para la formulación de modelos de álgebra lineal.

IV. El modelamiento para el análisis de los sistemas contables

Definiciones y notación básica

Un modelo es una representación del comportamiento de un sistema, en la que se utilizan técnicas de análisis y diseño para definir algunos parámetros, variables y relaciones que regulan su funcionamiento. Para efectuar el análisis de un sistema que se quiere controlar, es necesario obtener un modelo matemático que lo represente.

El modelo no tiene que ser una representación válida de ninguna situación real. Lo que uno debe preguntarse al evaluar un modelo no es que si refleja exactamente el proceso global sino que si refleja el segmento particular del proceso en que estamos interesados con la suficiente exactitud para considerarlo útil. Si la representación o modelo captura la esencia del proceso respecto del uso particular que se quiere intentar, el hecho de que no incluya todas las minucias del proceso global no es crucial.

El modelo debe representar un objetivo que debe alcanzarse o sea un estado deseable de ocurrencia de cierto fenómeno. Los modelos científicos teóricos se dedican a evidenciar cuáles son las relaciones involucradas en un campo universal de fenómenos que sirven para cualquier entidad en cualquier parte, en cualquier tiempo referido a una realidad pretendida.

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

El fundamento de los modelos teóricos de carácter universal son los constructos lógicos, aunque en la realidad ellos confrontan un significativo número de variaciones y solo rara vez se podrán patentizar con absoluta precisión, como igualmente sucede con los Principios referenciados en las Ciencias Naturales.

Existen dos líneas de pensamiento al referirnos a los modelos: la primera, denominada identificación de sistemas de eventos discretos, tiene como objetivo principal deducir las relaciones de entrada-salida restringidas a las condiciones en que se toman los datos representadas en lenguajes algorítmicos de control y determinación de fallos, conducentes a la resolución prevista de los problemas. En ella, el sistema se asimila a una caja negra de la que no interesan sus mecanismos internos de funcionamiento y se basa en mediciones experimentales autómatas, para la selección de parámetros y clases de modelos sobre los que irán a concurrir grupos de usuarios de tecnología.

La segunda, a la que nos referiremos principalmente, es denominada modelamiento de sistemas dinámicos continuos y tiene como objetivo la formulación de modelos conceptuales basados en hipótesis mediante ecuaciones algebraicas o diferenciales y sus condiciones lógicas para generar simulaciones aplicables en rangos más extensos capaces de admitir la experimentación con otros grupos de datos fenoménicos por estudiar. En ella, el usuario propone sus propias soluciones a los problemas que vayan surgiendo.

Dado que un sistema puede representarse en muchas formas diferentes, también puede tener muchos modelos matemáticos, por ello, dependiendo del sistema de que se trate y de las circunstancias específicas, un modelo matemático puede ser más conveniente que otro. Es muy importante no perder de vista que los modelos obtenidos resultarán adecuados solo para resolver determinados problemas y dentro de un rango de operación dada.

Una vez que se hayan definido los diferentes tipos de sistemas por estudiar, es necesario conocer su dinámica a partir de ecuaciones que relacionan el comportamiento de una variable respecto de otra. Normalmente, lo primero que se hace es identificar las variables que intervienen en el proceso para, posteriormente, interrelacionarlas entre sí, mediante leyes físicas que regulan estas situaciones.

Los modelos suelen clasificarse en determinísticos y estocásticos. Los procesos determinísticos no requieren del conocimiento previo de una probabilidad de ocurrencia de sus elementos. Un proceso es estocástico cuando su secuencia de eventos sigue una determinada ley probabilística, como es el caso del envejecimiento de las cuentas por cobrar.

Naturaleza de los modelos contables

Los primeros modelos contables fueron empíricos y casi siempre obtenidos a partir de cocientes comparativos entre eventos, por sectores de la producción, entre negocios congéneres, etc.

Tales primeras tentativas sobre razones financieras aisladas, aunque basadas en elementos con apoyo estadístico, directo y porcentual, no científico, tuvo su utilidad y despertó el interés por los patrones de medición.

Dado que estas mediciones no eran suficientemente explicativas y la pregunta que siempre quedaba en el aire se refería a “qué era lo bueno” o “cuál es el mejor cociente”, el avance en el campo del análisis contable dio lugar, por lo tanto, especialmente, a la necesidad de obtener parámetros o medidas patrones. Así en el sector textil, por ejemplo, se admitía que las industrias prósperas obtenían un cociente de liquidez entre 1,6 a 1,8 y así entonces, en esta ocurrencia modal estaría el paradigma a seguir.

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

En realidad, estas medidas de la liquidez (activo corriente/pasivo corriente) que dependen del monto del valor monetario de los medios patrimoniales aplicados al pago sin considerar su temporalidad, no interpretan eficientemente la función de la liquidez como condición efectivamente disponible para el aprovechamiento de oportunidades más que al concepto del plazo financiero o del plazo de producción en su relación con las necesidades de pagar.

Un modelo se construye a partir de una forma de pensar propia, que surge en determinada oportunidad, para realizar una observación precisa, sobre determinados campos de fenómenos bien identificados. Por lo tanto, en un modelo científico contable es preciso referirse a la apreciación de una correlación de factores, al enjuiciamiento lógico sobre la esencia de los fenómenos patrimoniales y, si es del caso, de la capacidad de generar ganancias de todo lo que pueda influir sobre ella.

Tomemos por caso la siguiente proposición lógica como base para un modelo teórico de aplicación universal para la gestión del lucro: *“las cantidades de inmovilizados técnicos, inventarios de productos, ventas y ganancias netas, deben guardar relaciones proporcionales constantes entre sí para que tenga lugar una eficacia”*.

$$(\Delta I_t \rightarrow \Delta Y) :: (\Delta Y \rightarrow \Delta I_k)$$

Esta proposición nos indica, que en condiciones normales y lógicas, debe existir una relación de proporcionalidad constante (en teoría) en la que el aumento de inversiones en medios de producción (I_t) implica el aumento de las ventas (Y), como a su vez, el aumento de las ventas ha de ser al aumento de ganancias (I_k).

En otros términos, “se debe lucrar proporcionalmente a las ventas como se debe vender proporcionalmente a lo invertido en producción”. Si las ventas

aumentan, las ganancias deben seguir la tendencia de crecimiento, si las inversiones en producción (fijas y circulantes) crecen, las ventas deben seguir el mismo ritmo.

Muchas situaciones pueden sugerir cálculos derivados de la instauración de modelos contables, pero por el simple hecho de ocurrir variaciones en torno a él, nada de ello invalida la filosofía del modelo universal para la gestión del lucro (Lopes de Sá, 2009).

Es igualmente probable que ocurran situaciones especiales en cuanto a las expresiones cuantitativas de valor entre “inversiones en medios de producción” y “ventas” conforme a la velocidad del capital en los procesos de formación del rendimiento, como en el caso de que las ventas llegaren a ser mayores que las inversiones, esto es:

$$Y > I_t$$

O como en el caso de la expresión que relaciona el aumento de las inversiones con el aumento de las ventas cuando resulta mayor que aquella existente entre el aumento de las ventas y el aumento de las ganancias:

$$\frac{\Delta I_t}{\Delta Y} > \frac{\Delta Y}{\Delta I_k}$$

Cuando admitimos que proporcionalmente la ganancia neta es a las Ventas así como las Ventas están para las inversiones en producción, establecemos un modelo cualitativo, teórico, genérico, científico, que proclama una relación que debe existir entre los factores enunciados. Si luego, traducimos en valores monetarios tal proporción fijando el “cuánto” de ganancia neta que debe ser esperado para un “tanto” de venta fijada y un “monto cierto” de inversión en

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

producción, estableceremos un modelo cuantitativo que solo servirá para una aplicación escogida como un caso particular.

Obviamente, el modelo cuantitativo de un centro comercial tendría una expresión diferente en un astillero, como el de una panadería lo tendría en relación a una caja de cambios y este ante una sala de belleza. Habría también alteraciones en relación al local, el paradigma de una fábrica de colchones sería diferente entre un lugar y otro (basta citar a título de ejemplo, algunos factores diferentes en esos centros de actividades, tales como ambiente natural, condiciones étnicas, organización social, madurez política, tradición educativa, ética, mercado, carga tributarias e intereses. El modelo teórico sería el mismo, pero el cuantitativo se alteraría en nuestros ejemplos referidos.

Un modelo cuantitativo debe ser considerado dentro de probabilidades de acontecimientos que tipifican realidades, poseyendo por tanto, un aspecto relativo. Los problemas de incertidumbre, o sea la influencia del riesgo, que afligen al movimiento patrimonial, obliga el buen sentido, apelando a las probabilidades aplicables a los modelos cuantitativos (hecho relevante en la Teoría del Sistema de Invulnerabilidades del Neopatrimonialismo).

Criterios aplicables a los modelos

Una hacienda requiere tener el patrimonio apropiado para respaldar las capacidades de: pagar, ganar, contrarrestar, sobrevivir, protegerse contra el riesgo, evitar el despilfarro, asumir el tamaño apropiado y concordar con los agentes transformadores.

En este punto, se hace exigible un análisis acerca del modo de interacción e integración de aquellos elementos promotores del fenómeno patrimonial, es decir, se requiere establecer las “correlaciones funcionales” de los componen-

tes del rendimiento ante las demás funciones patrimoniales en cada emprendimiento.

La aplicación de los medios patrimoniales de cada sistema hacendal estructura funciones en las que intervienen dos componentes:

- Las necesidades propias y específicas que erigen unas finalidades de satisfacción al emprendimiento.
- Los medios patrimoniales o bienes que suplen las utilizaciones del funcionamiento.

A cada uno de los agregados referidos debe operar una comparación, como puede ser:

$$\frac{\text{Resultante}}{\text{Necesidades}} :: \frac{\text{Medios}}{\text{Necesidades}}$$

Así por ejemplo, en cuanto al caso antes considerado, en el que el Modelo se centra en la proposición:

$$\frac{Ik}{Y} :: \frac{Y}{It}$$

Tendremos que la ganancia neta (Ik) como resultante del subsistema, es a las ventas (Y), estas que son necesarias como recuperación de la inversión incrementada por la ganancia, así como las ventas (Y) como medios para hacer crecer la producción están para las inversiones en producción (It), estos como necesidades para obtener el resultado.

El modelo podría también obtener otro tipo de relación como criterio, por ejemplo, una resultante en razón (recíproca) de los medios (It/Y) y estos en relación con las necesidades (Y/Ik), siempre sobre la óptica holística o de las relaciones lógicas patrimoniales de naturaleza esencial, dimensional y am-

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

biental. Depende de la lógica, la metodología (como ya fue referido) de lo que se pretende encontrar para la orientación del análisis, o sea, la percepción que se pretende tener. De cualquier forma, todavía lo sugerido obedece al rigor lógico de comparar lo que se consiga con lo que se precisaba conseguir.

Esta confrontación entre medios y necesidades genera unos resultados que por naturaleza deberían ser eficaces (E_a), es decir, los medios patrimoniales (m) deben ejercer funciones competentes para anular las necesidades (n) de cada subsistema hacendal.

$$E_a \rightarrow \frac{m}{n} \geq 0$$

Igualmente, las necesidades patrimoniales (P_n) se renuevan después de cada satisfacción tendiendo a derivar una nueva necesidad, estas tienden a infinito, o sea, teóricamente, en notación matemática:

$$P_n \rightarrow \infty$$

Lo ideal es que se produzca una eficacia (E_a), esta que ocurre cuando las necesidades patrimoniales (P_n) son satisfechas ($P_n = 0$) y que la continuidad de tal acontecimiento sea ilimitada, resultando, de esto una prosperidad (P_s). En notación, esto es:

$$(P_n \rightarrow 0) \rightarrow (E_a \rightarrow \infty) \Rightarrow P_s$$

La metodología de las proporciones

Un modelo científico del sistema de funciones patrimoniales convenientemente estructurado por razones y proporciones de relaciones funcionales sistemáticas de eficacia direccionada a la prosperidad, habría de estar considerando

como eficaz (que anula la necesidad) pasando a ser instrumento de medición de una realidad a ser alcanzada con base en identidades de relaciones entre hechos patrimoniales seleccionados de liquidez, de producción, de ventas, de ganancias, etc.

Es importante tener en mente que una resultante del sistema de funciones patrimoniales muestra cómo ocurre una relación entre los elementos patrimoniales que fueron utilizados y cómo se comportarán para anular las necesidades, lo que puede resultar en algo satisfactorio (eficacia) o no satisfactorio (ineficacia).

En tratándose de la aplicación de las proporciones como una opción metodológica, al establecer relaciones directas entre una resultante y los medios, el objetivo será siempre el conocimiento del comportamiento de la resultante ante los componentes del sistema y, todavía, será preciso evaluar lo que se consigue con lo que se dispone de medios patrimoniales (funciones ejercidas) de cara a las necesidades existentes; esto es, la confrontación entre resultante de un sistema y sus componentes (necesidades y medios) y un recurso racional de medición de la “eficacia”, del resultado, del esfuerzo desempeñado, para anular lo que se precisaba y colmar los fines pretendidos.

Obviamente, el paradigma referido estará tanto más próximo a la realidad, cuanto más fueren los campos de las relaciones dimensionales y ambientales considerados en su construcción. En la práctica, el incremento ocurrido en los elementos del sistema de liquidez que se halla en una correlación constante y obligatoria, sus combinaciones pueden dar lugar a ciertas discrepancias que quiebran el rigor matemático sugerido por el modelo.

La proporción que sugiere el Neopatrimonialismo Contable no se refiere apenas a razones exclusivas en cuanto a magnitudes, sino que incluye otras con-

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

sideraciones de orden lógico de índole correlativa. Las proporciones siguen la lógica de las identidades pero sobre un enfoque de naturaleza holística, es decir, estas no se limitan apenas al aspecto del tamaño en sí, sino con todo lo que sobre ella influye.

Así, por ejemplo, en el Sistema de Liquidez (Dos Santos, 2009), es preciso analizar:

- Las deudas y desembolsos, como necesidades patrimoniales de pagos,
- Recursos de caja, créditos por recibir, provisiones de bienes destinados a la venta, que son recursos financieros o medios para cubrir los pagos y,
- Lo que resulta de la confrontación entre tales componentes del sistema.

La eficacia del sistema de liquidez en un determinado tiempo implica la anulación de la exigibilidad pertinente al mismo tiempo. Esto implica que la eficacia de la liquidez ocurrirá siempre cuando las necesidades de pago pudieren ser cubiertas, tempestivamente, por los medios de pago, sin que ocurran variaciones anómalas entre los elementos en comparación (como por ejemplo, un desnivel entre una variación del cociente de liquidez y la variación de exigencias en el corto plazo).

Así, por ejemplo, una Resultante del Sistema de Liquidez (RSL), es a las necesidades exigibles (Ex) en el corto plazo, así como los medios Disponibles y Realizables (D + R) están para las necesidades exigibles en el corto plazo.

$$\frac{RSL}{Ex} :: \frac{Di + Rz}{Ex}$$

La resultante (liquidez) medirá relativamente lo que se tiene que pagar (Exigibilidades), así como los medios patrimoniales (Disponibles y Realizables) lo hace con su comportamiento ante las necesidades pertinentes (Exigibles en el corto plazo).

Una mirada sobre los estados eficaces del patrimonio debe derivarse de aquella que considera los propósitos idealmente deseables en cuanto al comportamiento de la riqueza. Es natural que el aumento en medios patrimoniales productivos haga crecer el volumen de producción y reducir los costos unitarios con lo que se aumentará el margen de ganancia, asumiendo la misma capacidad del mercado para adquirir los aumentos de la producción.

En la Resultabilidad, por ejemplo, los medios representan la sumatoria del costo del producto y el margen de remuneración del capital aplicado, por una parte y, por la otra, la necesidad, es el ingreso que permite recuperar el costo y trae consigo el margen (De Souza, 2009). El costo conveniente define la inversión de capital que posee las condiciones para ofrecer productos competentes ante la concurrencia de otros compradores y, también, soporta una tasa de remuneración a la empresa que hace parte de la formación de precios convenientes de venta. La eficacia del subsistema de resultabilidades surge cuando se satisface la necesidad del ingreso de modo que entrega a la empresa los valores de recuperación de la inversión en costos y cubren además, un margen satisfactorio de remuneración del capital aplicado. Cada componente del patrimonio hacendal presta diversas utilidades o servicios, es decir, diversas funciones.

Aunque en el Sistema de Resultabilidad, un modelo para la gestión eficaz del lucro sea por esencia, una situación deseable de alcanzar, fundamentada en relaciones ideales y, siempre, de naturaleza teórica, su materialización o no, es algo que estará sujeto, en todos los casos, a un número significativo de variables.

En el caso de la previsión de la ganancia como instrumento de gestión, suelen utilizarse modelos contables construidos para tipificar el comportamiento pasado o presente de determinada gestión. La consideración del rendimiento

referido a un plazo proyectado difiere de aquella situación teórica aplicada en la construcción de modelos de comportamientos necesarios para explicar los movimientos presentes. Dado que la vida de las empresas es el resultado de un sinnúmero de variables, las prospecciones a muy largo plazo pueden conducir a modelos inadecuados.

En consecuencia pues, cuando un análisis sigue un paradigma, la opinión más adecuada sobre la conducta de un patrimonio, se emite a partir de un régimen comportamental esperado, pero también comparativo e incluyente, debiendo expresar una plena capacidad de satisfacción de todas las necesidades patrimoniales de la empresa o de la institución, en carácter permanente.

Hipótesis de una eficiencia global

Las funciones patrimoniales operacionalizan los movimientos de la riqueza. Como los medios patrimoniales ejercen diversidad de utilidades, también despliegan “diversas funciones”, jerárquicamente subordinadas como naturalezas de las necesidades (Nepomuceno, 2008), así:

- ***Básicamente:*** Las capacidades de pagar (liquidez), obtener ganancias (resultabilidad), mantener el equilibrio (estabilidad), tener vitalidad (economicidad).
- ***De forma auxiliar:*** Protegerse contra los riesgos (invulnerabilidad), ser eficientes o producir adecuadas utilidades (productividad).
- ***Como meta suplementaria:*** Dimensionarse de forma competente (elasticidad), contribuir como agente para el entorno (sociabilidad).

Tales capacidades de los medios para generar utilidades con las cuales satisfacer las necesidades son las que justifican la existencia de cada uno de los sistemas de funciones patrimoniales, susceptibles de asumir modelos de eficacia (paradigmas de satisfacción de las necesidades en cada uno).

Cada vez que se estudia una empresa, es necesario analizar la eficacia de cada uno de los ocho sistemas de funciones, esto es, medir su capacidad integral para funcionar eficazmente. Una empresa puede tener buena capacidad de pago, y no tener capacidad de lucro, puede tener capacidad de generar ganancias o lucro y no tener capacidad de pago, puede que no produzca desperdicios pero tampoco generar ganancias, o puede estar lucrándose muy bien sin tener buena productividad.

Un sistema de funciones eficaz, tiende a influir positivamente sobre otros sistemas y, estos sobre otros, en un régimen de reciprocidad y de integración. Así, por ejemplo, si una empresa aumenta sus ganancias, tiende a poseer más recursos para pagar al día, si paga al día comienza a tener mayores posibilidades de obtener mayores ganancias, mayores oportunidades de efectuar compras y mayores oportunidades de contratar a personal mejor calificado. A esa correlación de eficacias se le denomina interacción perfecta.

Un modelo de sistema de funciones patrimoniales (S), por tanto, debe considerar las razones existentes entre una resultante del mismo (Rs) y las necesidades conocidas (para medir una relación entre el efecto funcional y la capacidad ejercida antes de la necesidad), debe también considerar una correlación entre los medios (Pm) y las necesidades patrimoniales (Pn).

Una expresión, pues, podrá ser:

$$\frac{R_s S_x}{P_n S_x} = \frac{P_m S_x}{P_n S_x}$$

La cual, en palabras, dice: *“La resultante (RsSx) de un sistema de funciones patrimoniales cualquiera es a las necesidades patrimoniales pertinentes (PnSx) así como los medios patrimoniales (PmSx) están para las necesidades patrimoniales del mismo sistema”*.

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

La eficacia de cada subsistema contribuye a la global, mediante su participación como sumando en la sumatoria de todos. Cuando en determinado instante los subsistemas de liquidez, resultabilidad, estabilidad, economicidad, productividad, invulnerabilidad, elasticidad y socialidad sean eficaces, así evidenciados por las resultantes de cada uno, entonces también existirá la eficacia global, representada por la sumatoria de todos los sistemas.

Como cada una de esas funciones es autónoma (puede haber liquidez y no haber resultabilidad, puede haber resultabilidad y no haber liquidez, etc.) así la totalidad eficaz puede representar una cualidad plena. El comportamiento de sujeción de la resultante de cara a las necesidades en cada sistema, tiene el mismo comportamiento de sujeción de los medios en relación a las necesidades, como lo tiene también, la sumatoria de las resultantes de todos los sistemas para la satisfacción de todas las necesidades.

Con el fundamento en todos estos argumentos lógicos es posible estructurar una hipótesis de modelo global, como representativo de una síntesis, así:

$$\frac{\sum R_s \sum S}{\sum P_n \sum S} :: \frac{\sum P_m \sum S}{\sum P_n \sum S} \rightarrow (\sum P_n \sum S = 0) \Rightarrow EaT$$

Donde dice que: *“La sumatoria de la Resultante (R_s) de todos los Sistemas (S) es a la sumatoria de las necesidades patrimoniales (P_n) pertinentes, así como la sumatoria de los Medios patrimoniales (P_m) en todos los sistemas (S) está para la sumatoria de las necesidades (P_n) lo que implica la anulación de todas las necesidades, implicando lógicamente, la Eficacia Total (EaT)”*.

O sea, habrá eficacia en cualquier centro de actividades (una filial por ejemplo), si en un tiempo “x” (un semestre, por ejemplo) la resultante del sistema así se comporta. O sea, un aumento del cociente de liquidez (implica la anu-

lación del aumento del exigible (las deudas no crecerán proporcionalmente), por lo tanto, ocurre una eficacia especial (Eae):

$$\Delta QL \rightarrow (\Delta Ex = 0) \therefore Eae$$

Tal consideración equivale a la ocurrencia del fenómeno de plena liquidez temporal pero no es el fruto de apenas consideraciones cuantitativas, por incluir estas y aquellas relaciones espaciales y temporales (Lopes de Sá, 2008). Como puede verse, lo que establece el Neopatrimonialismo Contable como objetivo no puede ser una simple división entre magnitudes para encontrar relaciones, sino que más allá de esto, interesa conocer todos los elementos que influyen en las relaciones de los componentes patrimoniales de un sistema específico, con base en la proporcionalidad que implica una visión dinámica y holística.

Así, pues, la evaluación de cada una de las capacidades que sean ejercidas por los sistemas, dependerá siempre de la consideración sobre una utilización competente de los medios patrimoniales ante las necesidades. Es posible pues, concluir que el papel de un consultor contable ante el estudio de las funciones de una empresa o institución debe partir del análisis de cada sistema, pero con vistas a considerarla globalmente, así como las circunstancias de los agentes causales que modificarán los estados patrimoniales.

La opinión del consultor contable ante los cambios en las variables

El juzgamiento global sobre la situación de una empresa o institución a través de los elementos contables, depende del examen de eficacia de todos los subsistemas de funciones patrimoniales (Gonçalvez da Silva, 2009). La eficacia global existirá cuando todas las necesidades del emprendimiento estén satisfechas o anuladas.

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

No basta que los medios superen las necesidades, es necesario que tal hecho ocurra tempestivamente y con armonía ante las variaciones entre los componentes del sistema y su resultante.

Las variaciones que experimentan los elementos de las fórmulas y axiomas pueden alterar la estructura y la dinámica que sugiere un modelo contable pertinente. No se trata de despejar las dudas, ni de validar las previsiones ni verdades de los modelos contables, sino más bien de conciliar de forma lógica las condiciones sobre las que se aplican y cómo se armonizan sus contenidos.

Definitivamente, la indagación sobre las razones que promueven la ineficacia estructural o funcional del estado patrimonial es una tarea de importancia crucial en la opinión de un analista. La inflexibilidad no es buena consejera cuando los fenómenos que se consideran son plenos de complejidad, sujetos a innumerables variables y a cada naturaleza de organismo en sus espacios y tiempos. La afirmación sobre un estado patrimonial, un sistema de funciones, lo mismo que un elemento aislado, requiere encontrar razones que lo fundamenten.

Observar que algo discrepa de un modelo es apenas un indicio, para formar opinión a ser ofrecida por un consultor. La obtención de cocientes, índices, proporciones, estadísticas, etc., por sí solos, no representan una conclusión global, siendo apenas instrumentos encaminados a satisfacer entendimientos que deben sustentar opiniones. Los parámetros poseen la rara importancia de producir imágenes de estados ideales pero apenas muestran un reflejo sobre la realidad derivada del curso de los elementos patrimoniales. Más bien, ejerciendo más profundas verificaciones sobre las desviaciones de los modelos cualitativos nos acercaremos más objetivamente a las causas. *“Que el modelo cualitativo como idea, haya sido o no materializado, es un recurso que solo*

la ciencia puede ofrecer, exigiendo conocimiento de naturaleza doctrinaria y experimental”.

Los constructos que fundamentan las proposiciones lógicas de proporcionalidad constante para la eficacia del rendimiento quedan condicionados en calidad y cantidad por las restricciones sobre los entornos ambientales del patrimonio y de los centros de operaciones, todo ello relacionado con lo que pueda ocurrir sobre las causas o efectos a través del tiempo. Esa es la razón para la complementariedad de la causa y efecto de los fenómenos contables por la dimensionalidad, otorgándole profundidad a la percepción y tornando más eficiente el juicio sobre lo acontecido.

En las empresas de ciclos de producción prolongados (como la silvicultura, la construcción, etc.) por ejemplo, la apariencia de la información contable puede denunciar deficiencia transitoria, pero esta tiende a revertirse cuando ocurre aquella venta que se encontraba en proceso de formación o de producción. Igual sucederá con una empresa en reorganización o en modificación de líneas de productos o desarrollo de nuevos locales comerciales.

Los errores indicados por las diferencias entre modelo y realidad, pueden tener tanta ocurrencia en la estructura o composición del patrimonio, cuanto su dinámica o proceso de movimiento. Las inversiones excesivas o deficientes, los financiamientos excesivos o la falta de recursos financieros, son fallas comunes que llevan al patrimonio a desequilibrios de estructura. También, la lentitud en la rotación de los inventarios, las deficiencias en las cobranzas de los créditos a recibir, los procedimientos errados en los métodos de producción aplicados, pueden causar fallas de dinámica capaces de agravamiento de las situaciones.

La filosofía del holismo es un enfoque sobre la continuidad de los emprendi-

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

mientos que exige la observación global de un todo sobre la óptica de un movimiento armónico. *“El método inspirado en el holismo, exige la observación global de la riqueza patrimonial a partir de la esencia (necesidad, finalidad, medios patrimoniales y funciones), en todas sus dimensiones (causa, efecto, tiempo, espacio, cualidad, cantidad) y ambientes (internos y externos) que poseen influencia como fuerzas agentes que mueven la riqueza”*.

La secuencia del trabajo técnico que debería desarrollar un consultor contable habría de ser:

1. Seleccionar modelos cualitativos teóricos.
2. Cuantificar los modelos teóricos elegidos dentro de la realidad.
3. Considerar las probabilidades en las cuantificaciones.
4. Recopilar datos sobre las manifestaciones pertinentes.
5. Comparar las cuantificaciones con las realidades efectivas o evidenciadas.
6. Considerar los factores de mutaciones, especialmente los agentes que producen las transformaciones del patrimonio.
7. Establecer las variaciones de las comparaciones y,
8. Buscar conocer las razones de las variaciones.

V. El control de los sistemas contables dinámicos

Habitualmente los sistemas contables son modelados con mayor o menor eficiencia mediante el auxilio de las relaciones financieras. Sin embargo, es posible modelar procesos contables de infinitas maneras, como en el presente caso en el que pretendemos emular sistemas físicos cuyos comportamientos se proponen similares a los procesos contables. Es decir, la escogencia de los sistemas físicos que hayan de ser emulados para el modelamiento de algún sistema de otra naturaleza, depende del problema a resolver, del criterio del analista y del intervalo de validez que se pretenda tener para el modelo resultante.

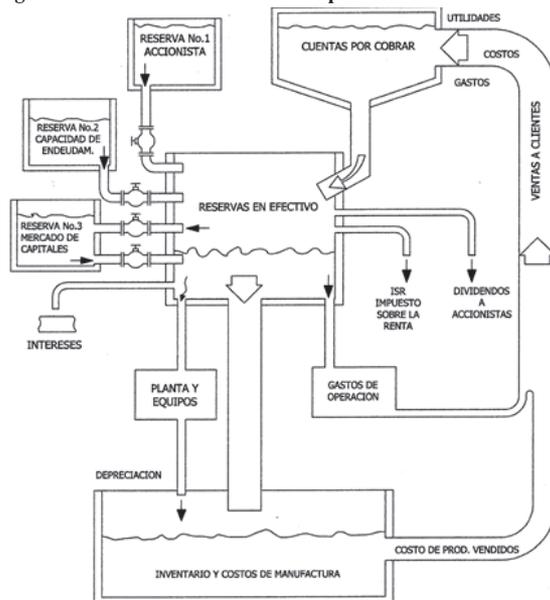
Definiciones y notación básica

La reproducción artificial de fenómenos o hechos físicos y su integración en una red de procesos realizados en serie o en paralelo con otros fenómenos es parte de lo que se conoce como modelamiento, simulación y control de procesos. El control de sistemas es la capacidad de ejercer restricciones o influencia directa sobre un determinado proceso o red de procesos simulados para hacerlos funcionar conforme a un plan.

Un sistema dinámico es un conjunto de cantidades que dependen del tiempo, las cuales identifican los objetos de interés. Un modelo matemático de un sistema dinámico se define como un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema con bastante precisión. La siguiente figura representa las características de un modelo circulatorio de los procesos contables.

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Figura 1. Modelo circulatorio de los procesos contables



Fuente: Ejecutivos, Finanzas, 03/1977

Todo modelamiento debe contar con suficiente información como para poder tipificar las tendencias del desempeño de los procesos y entonces poder proyectar su dinámica. Por ejemplo, para el caso al que apuntamos sobre control de las ventas a través del nivel de cartera o viceversa, requerimos contar con el tipo de registro estadístico que se muestra en los Anexos 1 y 2, de los que se puede optar por tomar los promedios como variables, o si es del caso, tomar los datos reales por considerar que estamos ante un régimen de funcionamiento en estado estable.

Para modelar el comportamiento de sistemas dinámicos que varían con el tiempo, existen diversas estrategias (Jiménez, 2003), entre ellas, las más difundidas son:

- a) Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) o ecuaciones de diferencias (ED).
- b) Funciones de transferencia (FT).
- c) Diagramas de bloques (DB).

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Una ecuación diferencial de un sistema dinámico es un modelo matemático que representa la relación entre las variables de entrada del sistema y las variables de salida, para una característica o estado del sistema en particular, como una función del tiempo.

Las variables son las dimensiones que muestran cómo evoluciona el estado del sistema, es decir, son el conjunto de menor tamaño posible de variables que contienen la información necesaria para predecir la evolución del comportamiento del sistema en forma única. Cualquiera que sea la interpretación que se adopte, debe tenerse presente que:

- Las variables pueden tener o no sentido físico.
- Las variables pueden o no ser medibles.
- Para un mismo sistema dinámico, las variables no son únicas, de hecho, se pueden definir infinitos conjuntos de variables.

La forma genérica de una EDO es una ecuación del tipo:

$$f \left[\frac{d^n y(t)}{dt^n}, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}, \dots, y(t), \frac{d^k u(t)}{dt^k}, \frac{d^{k-1} u(t)}{dt^{k-1}}, \dots, -u(t) \right] = 0$$

En la que $y(t)$ es la variable de salida y $u(t)$ es la variable de entrada. El número entero “n” es la máxima derivada de la salida y se denomina “orden” del modelo. Un caso particular de gran utilidad para tratar gran variedad de problemas se da cuando el sistema es lineal: En este caso la EDO toma la forma:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_2 y'(t) + a_1 y(t) = b_1 u(t) \quad \text{ecuación 1}$$

En la que a_1 y b_1 son constantes y por lo tanto describen un sistema lineal e

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

invariante en el tiempo. Los sistemas físicos se estudian muy eficazmente con el auxilio de los sistemas de ecuaciones simultáneas. El modelo matemático equivale a una o a un conjunto de ecuaciones matemáticas que representan la dinámica del sistema con exactitud.

El estado de un sistema en el tiempo t_0 es la cantidad de información necesaria en ese instante de tiempo para determinar de forma única, junto con las entradas u , el comportamiento del sistema para todo $t > t_0$.

De acuerdo a esta definición, el estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables que junto con el conocimiento de las entradas determinan por completo la definición del sistema para todo $t > t_0$.

Una vez que se proporciona la entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$ y se especifica el estado inicial $X(t)$ en $t = t_0$, el estado futuro de un sistema dinámico se determina por el conjunto de n variables de estado X_1, X_2, \dots, X_n .

La representación gráfica de los estados solamente es posible para sistemas lineales mediante un punto en el espacio de estados. El espacio de estados se refiere al espacio de n dimensiones, cuyos ejes de coordenadas X_1, X_2, \dots, X_n están formados por las variables de estado. Si consideramos solamente dos ejes de coordenadas formados por las variables X_1 y X_2 , cada punto representa la intercepción de los trayectos descritos por el sistema cuando se utilizan simultáneamente estas dos variables. Si consideramos tres variables (X_1, X_2, X_3) aún es posible la representación en tres dimensiones sobre el papel de los trayectos del sistema, pero cuando el número de variables es mayor, ya no es posible la representación directa de las emergencias de las variables por lo que muchas veces se acude a la estrategia de la reducción de la dimensión del sistema teniendo en cuenta la interrelación entre las variables.

Si se necesitan m variables de estado para describir por completo el comportamiento de un sistema determinado, estas m variables se consideran los m componentes del vector de estado \mathbf{x} , que en notación se representa del siguiente modo:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, un vector de estado es aquel que determina de manera única el estado del sistema $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ para cualquier tiempo $\mathbf{t} > \mathbf{t}_0$ una vez que haya sido conocido el estado en $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$ y sea especificada la entrada $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ para $\mathbf{t} > \mathbf{t}_0$.

Para representar el sistema dinámico como un espacio vectorial de las variables de estados, se definen las variables de estado expresadas en función de la función de salida:

$$\begin{aligned} X_1 &= y, \\ X_2 &= y', \\ \dots, \\ \dots, \\ X_{n-1} &= y^{n-2}, \\ X_n &= y^{n-1} \end{aligned}$$

y también las derivadas de las variables de estado (encadenadas):

$$\begin{aligned} X'_1 &= X_2, \\ X'_2 &= X_3, \\ \dots, \dots \end{aligned}$$

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

.....
 $X'_{n-2} = X_{n-1}$
 $X'_{n-1} = X_n$

Por lo que el espacio de estados en su forma matricial (Ogata, 1993) se compone de las siguientes dos ecuaciones lineales o linealizadas de primer orden:

$$X'(t) = A.x(t) + B.u(t)$$

$$Y(t) = C.x(t) + D.u(t)$$

En las que, por ejemplo, las matrices A, B, C y D cumplen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Funciones de transferencia

La modelación mediante ecuaciones diferenciales lineales e invariantes en el tiempo conduce a modelos en el espacio de estados para la descripción interna o, a modelos de función de transferencia para la descripción de la dinámica del comportamiento externo. En lo externo, las relaciones (cocientes) entre salidas y entradas de cada componente del modelo se operacionalizan mediante las funciones de transferencia [G(s)].

Toda función de transferencia se puede representar en variables de estado X_1, X_2, \dots, X_n en el dominio del tiempo, siendo “n” el número de estados igual al grado del polinomio denominador, sin embargo, a mayor grado surge la necesidad de tener que eliminar las derivadas de la función de entrada mediante sucesivas integraciones, lo que estaría introduciendo errores y ruidos cada vez mayores e inconvenientes.

Una de las aplicaciones más importantes de la transformada de Laplace es cambiar una variable de estado “X” como función de entrada a otra función “s” en el dominio de la frecuencia compleja. La letra s representa una nueva variable, que para el proceso de integración se considera constante. La gran ventaja de las transformaciones de Laplace es que incorporan los valores iniciales de las ecuaciones en la solución, con lo que se obtiene una solución completa, es decir, la solución general y sus valores iniciales.

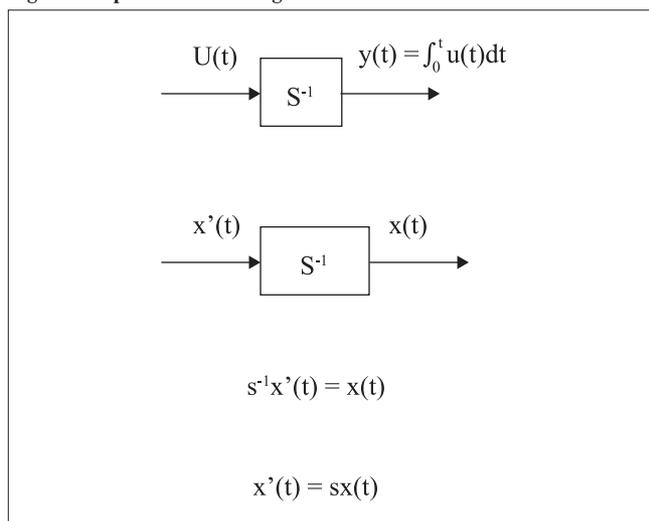
En general, la función de transferencia de un sistema lineal con coeficientes constantes invariantes en el tiempo está dada por el siguiente cociente de polinomios:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^n + b_2 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-2} s + a_{n-1}} \quad \text{ecuación 2}$$

La cual se define como el cociente formado entre la transformada de Laplace del polinomio de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace del polinomio de la entrada (función de excitación), suponiendo nulas (cero) todas las condiciones iniciales.

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Figura 2. Operadores de integración



El hecho de trabajar con funciones de transferencia, simplifica en gran medida el manejo matemático de los sistemas. El problema que surge entonces es que las variables de estado se deben definir de tal modo que en la ecuación de estado queden eliminadas las derivadas de u . Para ello contamos con los artificios mostrados en la figura. Esta figura muestra la simbología de los operadores de integración, en la que la primera de ellas, expresa la aplicación de un operador en un espacio de estado no lineal:

En los sistemas con derivadas de orden mayor, se deben asociar las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO's) con operadores de integración (s^{-1}), cuyas salidas son consideradas como las variables que definen el estado interno del sistema, es decir, cada operador funge de función de transferencia, permitiendo que las ecuaciones diferenciales se transformen en ecuaciones algebraicas lineales capaces de distribuirse sobre sumas o restas y las operaciones pertenecientes al dominio de la frecuencia compleja se convierten en multiplicaciones simples.

Así entonces, para un sistema lineal e invariante con el tiempo (De la Cruz, 2005) del que se conozca la función de transferencia, podríamos tener:

$$G(s) = Y(s) / U(s) = B(s) / A(s)$$

Esto es: $y(t) = [B(s) / A(s)].u(t) = B(s).x(t)$

Y también: $x(t) = u(t) / A(s)$

De donde: $u(t) = A(s).x(t)$

Por lo tanto, después de simplificar la ecuación 2, del numerador podemos escribir:

$$y(t) = [b_1 + b_2s^{-1} + \dots b_{n-1}s^{-n-1} + b_n s^{-n}].x(t)$$

$$y(t) = b_1x(t) + b_2\int x(t) + b_3\iint x(t) + b_4\iiint x(t) \dots$$

O sea:

$$y(t) = b_1x(t) + (b_2 - b_{1a1})x(t) + (b_3 - b_{1a2})x(t) + (b_4 - b_{1a3})x(t) \dots$$

E igualmente, el tratamiento del denominador de la ecuación 2 arroja:

$$u(t) = [1 + a_1s^{-1} + \dots a_{n-2}s^{-n-1} + a_{n-1}s^{-n}] x(t)$$

$$x(t) = u(t) - a_1s^{-1}x(t) - \dots a_{n-2}s^{-n-1}x(t) - a_{n-1}s^{-n}x(t)$$

$$x(t) = u(t) - a_1\int x(t) - a_2\iint x(t) - a_3\iiint x(t) \dots$$

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

(Ver Figura 5) y ahora digamos:

$$X_1(t) = \int x(t), X_2(t) = \int x_1(t), X_3(t) = \int x_2(t)$$

Para llegar a:

$$X_1'(t) = x(t) = -a_1x_1(t) - a_2x_2(t) - a_3x_3(t) + u(t)$$

$$X_2'(t) = X_1(t)$$

$$X_3'(t) = X_2(t)$$

Las cuales podemos escribir de forma matricial:

$$x'(t) = A.x(t) + B.u(t)$$

$$y(t) = C.x(t) + D.u(t)$$

En las que se cumple:

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

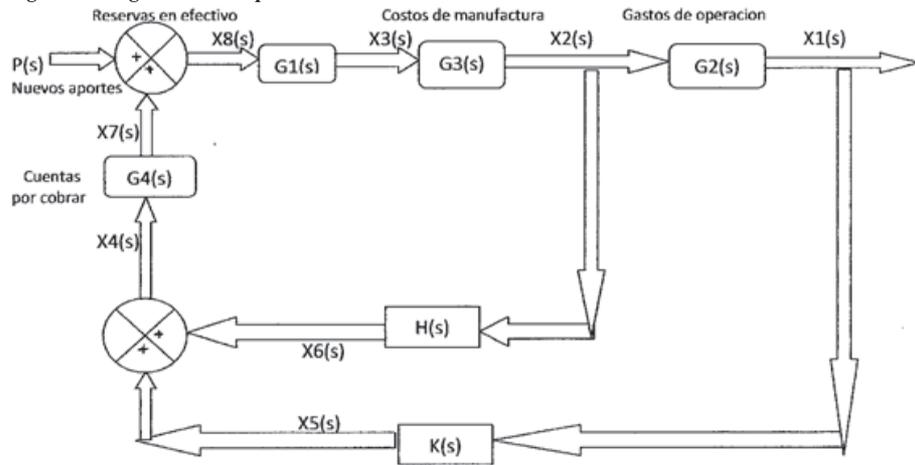
$$C = \begin{bmatrix} b_2-b_{1a1} & b_3-b_{1a2} & b_4-b_{1a3} & \dots & b_{n+1}-b_{1an-1} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} b_1 \end{bmatrix}$$

Diagramas de bloques

Para mostrar las funciones que lleva a cabo cada componente del modelo, se utilizan los diagramas de bloque. Cada bloque representa la función de trans-

ferencia que relaciona las corrientes de entrada y salida. Es decir, un bloque es un símbolo para representar la operación matemática que convierte la señal de entrada en salida y es por ello que la dirección siempre será única e indicará el flujo causal con su efecto y también el flujo de la información.

Figura 3. Diagrama de bloques del modelo circulatorio contable



La figura muestra un diagrama de bloques del modelo de un proceso circulatorio contable. Debe señalarse que el diagrama de bloques de un sistema determinado no es único, sino que es posible dibujar varios diagramas de bloques de un sistema y, recíprocamente, muchos sistemas diferentes y no relacionados entre sí, pueden representarse mediante el mismo diagrama de bloques. Todo dependiendo siempre, del criterio del analista (Ogata, 1995).

Un diagrama de bloques tan complicado por tener tantos lazos de retroalimentación puede ser objeto de reordenamiento siguiendo las reglas del álgebra de bloques. Sin embargo, para nuestro propósito solo mencionaremos algunas de estas reglas.

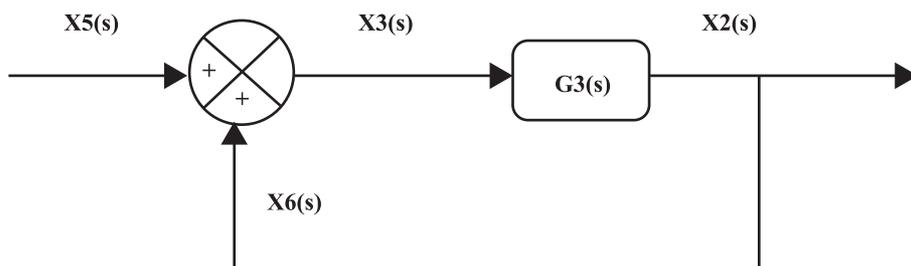
En esta figura, un punto suma está indicado mediante un círculo con una cruz.

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

El signo de más o de menos en cada extremo de flecha indica si la señal debe sumarse o restarse. Solo pueden sumarse o restarse cantidades que tengan las mismas dimensiones y unidades de medición. También, desde un punto ramificación parten las señales que se dirigen a otros bloques o puntos suma.

Cuando una salida se realimenta a un punto suma para integrarse con la entrada expresada en la misma dimensión y unidades, estamos frente a un *sistema en lazo cerrado*, como lo muestra la siguiente figura en la que se cumple $X2(s) = G3(s).X3(s)$ e igualmente, $X3(s) = X5(s) + X6(s)$:

Figura 4. Sistema en lazo cerrado



Ahora bien, un lazo es abierto cuando la salida no tiene efecto sobre la acción del control, es decir, cuando existe alguna modificación de la corriente entrante antes de encontrar la entrada del sistema. Generalmente, esta función la efectúa un sensor $[H(s), K(s), \text{etc.}]$, configurando un nuevo elemento de realimentación, encargado de medir la corriente entrante.

Por ejemplo, al referirnos al modelo circulatorio del proceso contable de la Figura 3, que expresa flujo de efectivo, debemos tener en cuenta que las corrientes $X5$ y $X6$ significan “Contribución de la corriente respectiva a las utilidades” o sea, la porción de ganancias que a través de $X4$ se vierten al sistema, por lo cual, se hace necesario convertir el efecto utilidades que ellas conllevan

van, al efecto ingresos, utilizando para ello el concepto de “margen de utilidad (m)” de la siguiente manera:

Valor de la corriente de Ingresos (X_4) = [Valor de las corrientes contributivas ($X_5 + X_6$)] /m

El modelo circulatorio del proceso contable, mostrado en la Figura 3, es un sistema en lazos sujeto a una perturbación $[P(s)]$, en el que se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$X_1(s) = G_2(s).X_2(s)$$

$$X_2(s) = G_3(s).X_3(s)$$

$$X_3(s) = P(s) + X_7(s)$$

$$X_4(s) = X_5(s) + X_6(s)$$

$$X_5(s) = K(s).X_1(s)$$

$$X_6(s) = H(s).X_2(s)$$

$$X_7(s) = G_4(s).X_4(s)$$

Finalmente, las corrientes entrantes se integran como:

$$P(s) + X_7(s) = P(s) + G_4(s).X_4(s) = P(s) + G_4(s).[K(s).X_1(s) + H(s).X_2(s)]$$

$$X_3(s) = P(s) + G_4(s).[K(s).X_1(s) + H(s).X_2(s)]$$

De donde despejamos:

$$X_2(s) = G_3(s).[P(s) + G_4(s).[K(s).X_1(s) + H(s).X_2(s)]]$$

$$X_2(s).[1 - G_3(s).G_4(s).H(s)] - G_3(s).G_4(s).K(s).X_1(s) = G_3(s).P(s)$$

Un sistema de lazo cerrado es aquel donde la señal de salida tiene efectos so-

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

bre la acción de control. Por ejemplo, para hallar la función de transferencia de la trayectoria directa de la perturbación $P(s)$ en la siguiente expresión:

$$[X_2(s)] / [P(s)] = [G_3(s).G_4(s)] / [X_3(s). [1-G_3(s).G_4(s).H(s)] - G_4(s).K(s).X_1(s)]$$

Cuando $K = 0$, tendremos una FT de la trayectoria directa en lazo cerrado, esto es:

$$[X_2(s)] / [P(s)] = [G_3(s).G_4(s)] / [X_3(s). [1-G_3(s).G_4(s).H(s)]]$$

En general, los diagramas de bloques y los métodos gráficos permiten deducir sistemas de ecuaciones de Entrada/Salida que resultan más apropiados para los sistemas complejos.

A veces, gráficamente, la operación del integrador pareciera más comprensible leyendo los diagramas de derecha a izquierda.

La metodología a seguir para pasar desde una EDO, o una FT, al DB se inicia partiendo desde de la salida y en forma retrospectiva se van colocando tantos integradores “ s^{-1} ” como sea el orden del sistema. De este modo, la salida va antecedida por “ n ” derivadas entre las que además de los bloques integradores, se intercalan los bloques estáticos que fueren necesarios y eventualmente derivadores antes de llegar a la entrada del sistema. Por ejemplo, para la función de transferencia dada según la ecuación 2, los integradores utilizados, tal como se muestra en la Figura 5, son los siguientes:

$$X_1 = s^{-1}X_2$$

$$X_2 = s^{-1}X_3$$

$$X_3 = s^{-1}X_4$$

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Con el objetivo de simular un proceso, se requiere disponer de un modelo representado por mediciones físicas o por variables matemáticas con el que se pueda reproducir un fenómeno natural en un medio controlado. La metodología del modelado comprende:

Conceptualización

Dada la naturaleza compleja del control de los sistemas, un sistema puede estar conformado por varios subsistemas más simples interconectados, con base en simplificaciones ya probadas en problemas similares, donde cada uno de ellos contiene elementos cuyo comportamiento es estudiado por diferentes disciplinas.

De acuerdo al criterio del autor, un sistema hidráulico permite introducir simplificaciones ventajosas para la simulación de la presión que ejercen los niveles de cartera imponiendo regulaciones sobre la fuerza de ventas para mantener el flujo del capital de trabajo necesario y, también para simular el efecto que los niveles de utilidades acumuladas y dividendos por pagar ejercen regulación sobre la corriente de nuevas reservas que crean los empresarios e inversionistas para mantener el flujo de requerido de actividades.

Por su parte, un sistema mecánico permite buenas simplificaciones para simular la ejecución del costo de producción, los gastos de operación y la distribución de dividendos por su marcada relación con el efectivo disponible.

En los siguientes párrafos estaremos refiriéndonos al diseño de un modelo de control del proceso contable Calcáreos del Caribe S.A., cuyos datos operacionales aparecen en el Anexo 1 al final del presente capítulo, con el fin de disponer de un medio de control capaz de mantener el proceso bajo condiciones de operación deseables.

Se parte de la hipótesis de que el comportamiento del sistema contable (prototipo) Calcáreos S.A. guarda similitud dinámica con el proceso circulatorio (modelo) representado en el diagrama de la Figura 1. Igualmente, para su mejor explotación, se considera que este modelo circulatorio puede dividirse en dos subsistemas más simples interconectados, el primero, emulando un sistema hidráulico compuesto por dos tanques interconectados sin interacción sobre las respectivas alturas del líquido en sus estados de régimen estable y, el segundo, emulando un sistema mecánico masa-resorte-amortiguador.

La similitud dinámica significa igualdad de la relación entre las fuerzas dinámicas en puntos homólogos del prototipo y del modelo. Según la teoría de la similitud dinámica: *“Si dos sistemas obedecen al mismo grupo de ecuaciones y condiciones gobernantes y, si los valores de todos los parámetros y las condiciones se hacen idénticas, los dos sistemas deben de exhibir comportamientos similares con tal de que exista una solución única para el grupo de ecuaciones y condiciones”*.

Formalización

Sistemas hidráulicos

Objetivo: Representar, mediante la operación de flujo y almacenamiento de líquido en un primer tanque, los subsistemas de Cuentas por cobrar a clientes del modelo circulatorio contable mediante ecuaciones de estado.

Solución: El punto clave para la representación del subsistema mediante ecuaciones de estado es la selección adecuada de las variables de estado y se lleva a cabo como sigue: El flujo o velocidad de las masas líquidas pueden describir dos tipos de fenómenos: el flujo laminar y el flujo turbulento. Los sistemas de flujo laminar pueden expresarse mediante ecuaciones diferenciales lineales

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

mientras que un flujo turbulento debe expresarse mediante ecuaciones diferenciales no lineales.

Las ventas periódicas (\$/año) representan el flujo de los sistemas hidráulicos, en cuyo análisis es necesario considerar los tipos de flujo laminar y flujo turbulento. Al considerar la salida a chorros del flujo a través de un tubo corto en la parte inferior de un tanque, si el flujo es turbulento la relación entre el flujo “V” (de las ventas anuales) en estado estable y el nivel de líquido “B” (de la cartera al final del periodo) que impulsa el líquido a salir, se obtiene mediante la expresión:

$$V^2 = K.B \qquad \text{ecuación 3}$$

De donde al derivar y sustituir se obtiene una medida que en hidráulica se conoce como Resistencia (R_t) al flujo turbulento:

$$R_t = dB/dV = 2B/V$$

Analíticamente, esta medida se define como: *“el cambio en la diferencia de nivel por unidad de tiempo (variación periódica de la cartera) y depende directamente del nivel actual del líquido (nivel de cartera) e inversamente al flujo medio del líquido (ventas periódicas)”*.

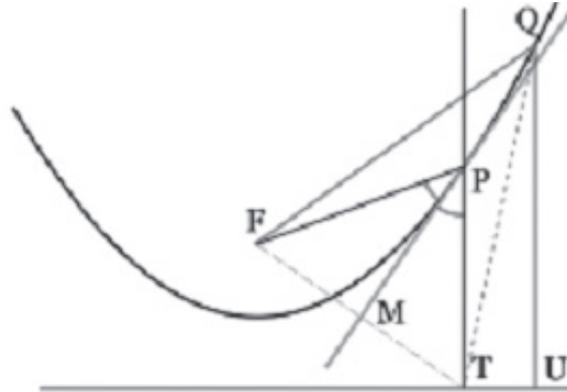
En los Anexos 3 y 4 se hace la construcción de estas ecuaciones. El problema que estamos tratando de resolver es relacionar las siguientes dos derivadas:

$$(dB/dt) = R_t(dV/dt)$$

En muchos casos prácticos, la Resistencia (R_t) se determina gráficamente considerando las condiciones de operación en la vecindad del punto P desde don-

de la prolongación de la línea tangente a la parábola ($V^2 = K.B$) intercepta la ordenada en el punto $R(-B,0)$, es decir, cuando el valor de la pendiente de la tangente en el punto P sea igual a $2B/V$.

Figura 7. Parábola abierta hacia arriba



Fuente: commons.wikimedia.org

Sin embargo, aquí mencionaremos la manera de obtenerla analíticamente. En el caso de ser la parábola abierta hacia arriba, “cuando la intersección de la recta tangente en el punto $P(x_1, y_1)$ a la parábola con vértice en el punto $V(h, k)$ y foco $F(h, k+p)$, dada según la ecuación:

$$(x_1 - h)(y - k) - 2(y_1 - k)(x - h) + (x_1 - h)(y_1 - k) = 0$$

Pase por el punto $R[h, -(k + p)]$, podemos conocer la Resistencia”.

O si la parábola es abierta hacia abajo, “cuando la intersección de la recta tangente en $P(x_1, y_1)$ a la parábola con vértice en el punto $V(h, k)$ y foco $F[h, (p - k)]$, dada según la ecuación:

$$(x_1 - h)(y - k) - (p - y_1 + k - D)(x - h) + (x_1 - h)(p - D) = 0$$

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Siendo:

$$D = +\sqrt{p^2 - 6p(y_1 + k) + (y_1 + k)^2}$$

Pase por el punto $R[h, (k + p)]$, podemos conocer la Resistencia”.

En general, la solución de problemas no lineales es altamente complicada y se recurre a la linealización del modelo en torno a un punto de trabajo $P(x_1, y_1)$ y resolver el problema del control con las técnicas de análisis y diseño lineal de que se dispone. Bajo ciertas suposiciones, casi siempre puede obtenerse un modelo lineal, sin embargo, también surge un compromiso entre la simplicidad del modelo matemático y la precisión de los resultados que se obtienen con él.

Es un hecho que al aumentar la complejidad del problema, aumenta la exactitud, pero también es cierto que un modelo adecuado que cumpla con el principio de que *“siendo iguales otras cosas, los modelos simples son preferibles a los complicados”*.

Se considera lineal a todo aquel sistema que se le pueda aplicar el principio de superposición: *“La respuesta producida por la aplicación simultánea de dos funciones excitadoras distintas, es la suma de las dos respuestas individuales”*. Por tanto, para el sistema lineal, la respuesta a varias entradas se calcula tratando una entrada a la vez y sumando los resultados. Igualmente, si en una investigación experimental se encuentra que la causa y el efecto son proporcionales entre sí, el sistema se considera lineal.

En la realidad, aunque muchas relaciones físicas se presentan por ecuaciones lineales, no son así. De hecho, los sistemas considerados lineales, lo son solamente en un rango reducido, por ello si lográsemos mantener pequeños los

cambios en las variables dentro del rango lineal, el sistema se considera lineal o linealizado.

Por ejemplo, una altura de líquido que dependa del cuadrado de la velocidad, puede hacerse lineal para bajas velocidades y cuadrática a altas velocidades. En estas condiciones, un sistema hidráulico operando bajo condición lineal, cuya entrada es $v(t)$ y cuya salida es $b(t)$, podría escribirse como:

$$b = v \cdot R \qquad \text{ecuación 4}$$

(Análoga a la ley de Coulomb) en la que R es denominada Resistencia al flujo. Esta relación indica que *“una pequeña variación (b) de la cartera alrededor de la condición de operación lineal es proporcional a una pequeña variación de las ventas (v)”*.

Geoméricamente hablando, la resistencia “ R ” se calcula mediante el cociente:

$$R = \frac{b_1 - b_i}{v_1 - v_i}$$

También podemos establecer una comparación de la rapidez de variación entre la operación lineal versus la no lineal, alrededor de la condición de operación lineal, según la expresión:

$$C = \frac{(V_1 - V_i) - (v_1 - v_i)}{db_1/dt}$$

En la que la constante C es denominada Capacitancia y se puede definir como *“el número de unidades de diferencia entre los cambios de la velocidad turbulenta (V_t) y la velocidad laminar del líquido (v) por cada unidad de cambio en la cantidad de líquido almacenado (b) en la unidad de tiempo”*.

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

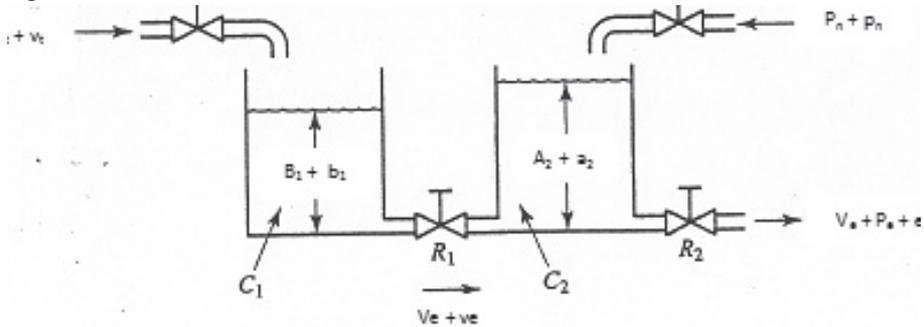
Refiriéndonos al primer término del numerador, encontramos aquí que su conformación como cociente de una serie de diferencias finitas es susceptible de expansión en la forma de series de Taylor alrededor del punto P (v_1, b_1), en donde al dejar de considerar los términos de orden superior al cuadrático, permitirán escribir:

$$C_1 (db/dt) = V_t - [(b_1 - b_i) / R_1] \quad \text{y más propiamente:}$$

$$\frac{db_1}{dt} = -\frac{1}{C_1 R_1} b_1 + \frac{1}{C_1 R_1} b_i + \frac{1}{C_1} V_t \quad \text{ecuación 5}$$

En la cual, el producto “RC” es denominado “constante de tiempo del sistema”.

Figura 8. Subsistema hidráulico del modelo de control contable asumido



Fuente: Ogata, 1995

Tal como ha sido supuesto, al no existir interacción sobre las alturas de líquido debido a la interconexión de los dos tanques, la función de transferencia se calcula del mismo modo para cada uno de ellos. Esto es, si a la expresión:

$$R_1 C_1 (db/dt) + (b_1 - b_i) = R_1 V_t$$

Aplicamos la transformación de Laplace, a ambos lados de la ecuación, ob-

tendremos:

$$[R_1 C_1(s) + 1].b(s) = R_1.V(s)$$

Ahora, considerando que “V” es la entrada y “b” la salida, la función de transferencia será:

$$\frac{b(s)}{V(s)} = \frac{R_1}{R_1 C_1(s) + 1}$$

Si no obstante, se toma “v” como la entrada, siendo “b” la salida, entonces escribiremos:

$$\frac{v(s)}{V(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 + 1}$$

Donde simplemente se ha dicho que: $b(s) = v(s). R$

Sistemas mecánicos

Objetivo: Representar el subsistema de Costos y Gastos mediante ecuaciones de estado.

Solución: El punto clave para la representación del subsistema mediante ecuaciones de estado es la selección adecuada de las variables de estado y se lleva a cabo como sigue:

- a. Se determina la ecuación diferencial que representa al sistema dinámico y su grado:

Aquí, se nos viene a la mente la ecuación diferencial de Ohlson para expresar el modelo llamado de la utilidad limpia, aunque esta vez, a cambio

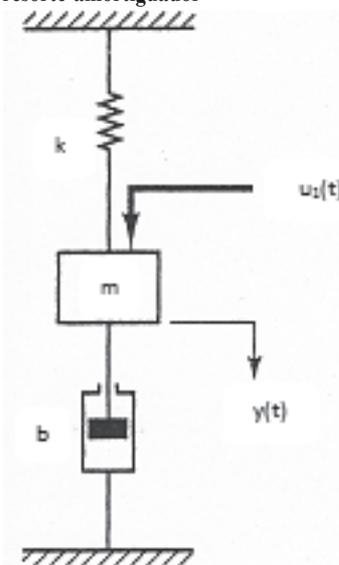
CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

de la utilidad y del patrimonio, nos referiremos al efectivo disponible y a los costos y gastos operacionales. Bajo la óptica del administrador de un emprendimiento, no tiene discusión una relación existente entre la ejecución del costo de producción, erogación de gastos de operación y distribución de dividendos respecto del efectivo disponible. Sin embargo, lo extraño y por ello novedoso, es que entre ellas también debería distinguirse una presunta sumisión mecánica al vigor de la corriente de los dividendos pagados. Veámoslo.

- b. Se eligen variables de estado y el grado de relación entre ellas.

Intentaremos representar la relación costo de producción-gastos operacionales-distribución de dividendos, mediante el sistema mecánico masa-resorte-amortiguador, tal como se muestra en la figura:

Figura 9. Sistema mecánico masa-resorte-amortiguador



Fuente: Ogata, 1995

El efecto del desplazamiento (y) de la masa (m), con relación al piso, tiene lugar con la fuerza aplicada “ $m \cdot (d^2y/dt^2)$ ”, la cual en el modelo representa al costo de producción al que arbitrariamente le ha sido asignada proporcionali-

dad con la segunda derivada de la corriente de los dividendos. El amortiguador es un dispositivo lleno de aceite con coeficiente de fricción (b) que opone al movimiento la fuerza viscosa “ $b \cdot (dy/dt)$ ” que aquí representa a los gastos operacionales al que le asignamos proporcionalidad con la primera derivada de la corriente de los dividendos. El resorte se estira o contrae en una oposición constante (k) a la deformación mediante la fuerza elástica “ $k \cdot (y)$ ” que representa a los dividendos pagados. La fuerza externa “u (efectivo disponible)” es la entrada para el sistema y la sumatoria de las fuerzas en equilibrio (función de “y”) es la salida.

Los sistemas mecánicos se rigen por la segunda ley de Newton. Si calculamos la sumatoria de las fuerzas en equilibrio, obtenemos la ecuación del movimiento:

Fuerza aplicada + Fuerza de fricción + Fuerza elástica = Fuerza neta

Costo de producción + gastos operacionales + dividendos pagados = Efectivo disponible

$$m \cdot (d^2y/dt^2) + b \cdot (dy/dt) + k \cdot y = u \qquad \text{ecuación 6}$$

Estos valores pueden estimarse mediante la técnica de la regresión múltiple aplicada sobre los datos del Anexo 7 para obtener la ecuación:

$$0,418y'' - 0,136y' + 0,966y = u - 40.730$$

Al tratar este problema asociado a la confección del diagrama de bloques (Figura 3), luego de haber despejado la derivada más alta y de haber definido las variables de estado, se tiene:

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

$$y'' = -(b/m)y' - (k/m)y + (1/m)u$$

$$X_1 = y;$$

$$X_2 = X_1' = y';$$

$$X_3 = X_2' = y''$$

Se continúa con la utilización de operadores integradores sobre esta ecuación para deshacer integrales y pasar al dominio del tiempo mediante el tratamiento con derivadas:

$$X_1 = s^{-1}X_2$$

$$X_2 = s^{-1}X_3$$

$$X_3 = s^{-1}X_8$$

Con lo que la ecuación se convierte en:

$$s^{-1}X_8 = -(b/m).s^{-1}X_3 - (k/m).s^{-1}X_2 + (1/m).U$$

Que interpreta fielmente el DB de la Figura 3 con los sensores:

$$H(s) = b/m,$$

$$K(s) = k/m.$$

Y se ha de tener en cuenta que cualquier otra entrada “U” antes de su integración al sistema debe ser convertida a la misma clase de unidades de medida mediante la aplicación del factor (1/m). Debemos recordar que las Ventas están valorizadas al precio de venta mientras que los inventarios están valorizados al costo de producción, lo cual exige que se haga homogénea la información.

Parametrización

Sistemas hidráulicos

Objetivo: Representar, mediante la operación de flujo y almacenamiento de líquido en un segundo tanque, el subsistemas de Dividendos por pagar a accionistas del modelo circulatorio contable mediante ecuaciones de estado.

Solución: Haciendo consideraciones similares sobre el segundo tanque, al establecer una comparación de la rapidez de variación entre la operación lineal versus la no lineal, alrededor de la condición de operación lineal, tendremos:

$$C_2 = \frac{[P_1 - (P_i + p_1)] + [p_1 - (p_i + v_i)] - (v_i - v_1)}{da_1/dt}$$

La cual también puede escribirse como:

$$\frac{[(P_1 - P_i) - p_i] + [(b_1 - b_i) / R_1] - (b_i / R_2)}{(da_1/dt)}$$

y más propiamente:

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{1}{C_2 R_1} b_1 - \left(\frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) b_i + \frac{1}{C_2} P_e$$

ecuación 7

Ahora, con base en un análisis estadístico de regresión de los datos registrados en el Anexo 3, ha sido posible establecer la siguiente expresión matemática:

$$V^2 - 1,834842V - 0,083391 = - 3,125B$$

ecuación 8

Esta es la ecuación representativa del flujo de las ventas periódicas (V \$/año) en estado estable y el nivel de líquido “B” (de la cartera al final del periodo)

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

que impulsa el líquido a salir. Se trata de una parábola abierta hacia abajo, con vértice en el punto V (0,917; 0,243) y foco F [0,917; (-0,781+0,243)].

La condición de operación lineal la describe la línea tangente al pasar por los puntos P(0,206; 0,134) y R[0,917; (0,781+0,243)], determinando los siguientes parámetros:

v_l	b	R₁₁ = 2p/(v_l-v_R)	db/dt	db/dv	tg-1
0,20598159	0,13406196	2,1962524	0,02460355	0,45532108	24°28'51"

Excepto (db/dt) que se obtiene mediante regresión simple, la linealización restante de este fenómeno, mostrada en el Anexo 3, se obtiene a partir de la recta tangente que corresponde a la ecuación lineal:

$$b = 1,2508v + 0,1236 \qquad \text{ecuación 9}$$

Ahora considerando al segundo tanque, tendremos:

$$P^2 - 0,005546P + 0,00000769 = 0,002277A \qquad \text{ecuación 10}$$

Esta es la ecuación representativa del flujo de la corriente de nuevas reservas (P \$/año) que crean los empresarios e inversionistas para mantener el flujo de requerido de actividades y el nivel "A" de utilidades acumuladas y dividendos por pagar al final del periodo. Se trata de una parábola abierta hacia arriba, con vértice en el punto V (0,0028; 0,0301) y foco F[0,0028; (0,0301-0,0005)].

La línea tangente al pasar por los puntos P (0,0039; 0,0307) y R [0,0028; (-0,0005+0,0301)] determina también los siguientes parámetros:

p₁	a	R₁₂ = 2p/(v_l-v_R)	da/dt	da/dp	tg-1
0,003897706	0,030701086	0,987674994	0,000644346	0,987814554	44°38'56"

Excepto (da/dt) que se obtiene mediante regresión simple, la linealización restante de este fenómeno, mostrada en el Anexo 4, se obtiene a partir de la recta tangente que corresponde a la ecuación lineal:

$$a = 0,9877p + 0,269$$

ecuación 11

Sistemas mecánicos

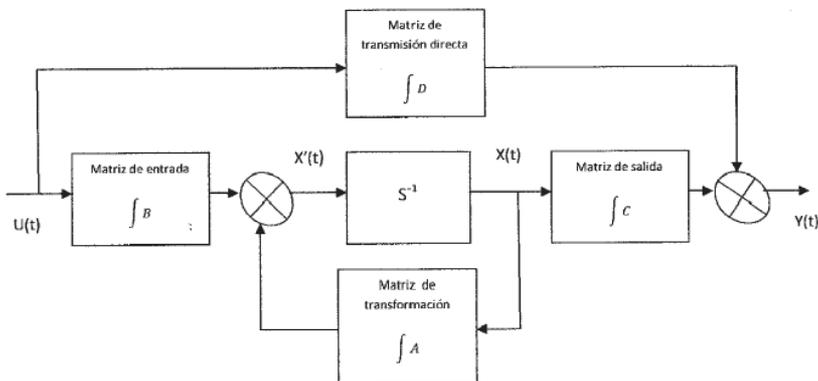
Un sistema descrito por una ecuación diferencial de estado, se puede representar siempre en variables de estado en la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

El modelo de un sistema de control en variables de estado es una representación matricial de las ecuaciones que rigen al sistema, lo cual puede esquematizarse del siguiente modo:

Figura 10. Modelo de un sistema de control en variables de estado



Es claro que llegado a este punto, se entra al campo del álgebra de matrices. Partiendo de:

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

$$\dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t)$$

Aplicamos entonces la transformación de Laplace de la ecuación diferencial de estado para deshacer derivadores:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

Con lo que obtenemos los valores característicos de A que satisfacen $(sI - A) = 0$

$$(sI - A).X(s) = B.U(s)$$

Y luego determinar la inversa de la matriz característica: $(sI - A)^{-1}$, esto es,

$$X(s) = (sI - A)^{-1}.B.U(s) \text{ o sea:}$$

$$(sI - A) = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1/m \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s + b/m & 1 \\ -k/m & s \end{bmatrix}}{s^2 + (b/m).s + k/m}$$

Cuya sustitución en la segunda ecuación, arroja:

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D].U(s)$$

Y finalmente, para determinar la función de transferencia, tendremos:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Ahora nuevamente en números. Por ejemplo, siendo conocidos los elementos de las matrices A, B, C y D, tendremos:

$$G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

$$G(s) = [1 \ 0] \cdot \frac{\begin{bmatrix} s + b/m & 1 \\ -k/m & s \end{bmatrix}}{s^2 + (b/m)s + k/m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1/m}{s^2 + (b/m)s + k/m}$$

Otra manera de resolver el mismo problema, supone que este es un sistema lineal de condiciones iniciales iguales a cero, en el que $y(0) = 0$, $dy/dt(0) = 0$ y que $u(0) = 0$, al que aplicando la transformación de Laplace a ambos lados de la ecuación arroja:

$$s^2 Y(s) = (1/m) \cdot U(s) - (k/m) \cdot Y(s) - (b/m) \cdot s Y(s)$$

Reuniendo términos comunes:

$$[s^2 + (b/m)s + k/m] \cdot Y(s) = (1/m) \cdot U(s)$$

Finalmente, siendo “u” la entrada y, “y” la salida, la función de transferencia sería:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \left(\frac{b}{m}\right) \cdot s + \left(\frac{k}{m}\right)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Resolución

Sistemas hidráulicos

De acuerdo con las conceptualizaciones anteriores y con base en la Figura 8 sobre el subsistema hidráulico del modelo, para cada uno de los tanques podremos escribir:

Ecuación 12

Siendo: $C_1 db_1 = (V_t - V_c)dt$

Donde: $[(b_1 - b_i)/R_1] = V_c$

Tendremos: $(db_1/dt) = (1/C_1)(V_t - (b_1 - b_i)/R_1)$
 $(db_1/dt) = -((1/C_1 R_1)b_1 + (1/C_1 R_1)b_i + ((1/C_1)V_t$

Ecuación 13

Siendo: $C_2 da_1 = (V_e + P_n - E_n)dt$

Donde: $(b_i/R_2) = E_n$

Tendremos: $(da_1/dt) = (1/C_2)[(b_1 - b_i)/R_1 + P_n - (b_i/R_2)]$
 $(da_1/dt) = (1/C_2 R_1)b_1 - [(1/C_2 R_1) + (1/C_2 R_2)]a_1 + (1/C_2)P_n$

Ahora, si definimos las variables de estado del siguiente modo:

$$X_1 = b_1, X_2 = a_1$$

Las variables de entrada como:

$$U_1 = v_{b1}, U_2 = v_{a1}$$

Y las variables de salida:

$$y_1 = b_1 = X_1$$

$$y_2 = a_1 = X_2$$

Las ecuaciones 12 y 13 pueden ser escritas como:

$$X'1 = -\frac{1}{R_1 C_1} X_1 + \frac{1}{R_1 C_1} X_2 + \frac{1}{C_1} U_1 \quad \text{ecuación 14}$$

$$X'2 = \frac{1}{R_1 C_2} X_1 - \left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) \cdot X_2 + \frac{1}{C_2} U_2 \quad \text{ecuación 15}$$

Para cada uno de los periodos bajo estudio Calcáreos del Caribe S.A. habrá que plantear similares sistemas de ecuaciones. Obviamente, el paso final sería hallar la solución general de las dos ecuaciones diferenciales de primer orden para que con base en ella expresar las variables de estado. Sin embargo, esta vez dejaremos pendiente tal procedimiento.

Sistemas mecánicos

Una vez construida la ecuación de estado, en este caso con derivadas de orden mayor, se deben definir las variables de estado, siguiendo la secuencia:

- Se identifican las entradas “u” y las salidas “y” y luego se despeja la derivada del mayor orden:

$$my'' = -by' - ky + u$$

$$y'' = -(b/m).y' - (k/m).y + u$$

- Se asignan las variables de estado “X” hasta la derivada del menor orden (mayor derivada) desde la salida “y” de primer orden:

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

$$X1 = y$$

$$X2 = y'$$

$$X3 = y''$$

- c. Se definen equivalencias entre las variables, hasta la derivada de mayor orden:

$$X1 = y$$

$$X'1 = X2 = y'$$

$$X'2 = X3 = y''$$

- d. Se sustituyen las variables en las ecuaciones diferenciales de estado:

$$X'1 = X2 \quad \text{ecuación diferencial de salida}$$

$$X'2 = -(k/m).X1 - (b/m).X2 + (1/m).u \quad \text{ecuación diferencial de entrada}$$

- e. Se construyen matrices de las ecuaciones que rigen al modelo:

Un sistema descrito por una ecuación diferencial de estado, se puede representar siempre en variables de estado en la siguiente forma:

$$x'(t) = A.x(t) + B.u(t)$$

$$y(t) = C.x(t) + D.u(t), \text{ esto es:}$$

$$\begin{matrix} X' \\ \\ \end{matrix} = \begin{matrix} A \\ \\ \end{matrix} \cdot \begin{matrix} x(t) \\ \\ \end{matrix} + \begin{matrix} B \\ \\ \end{matrix} \cdot u$$

$$\begin{bmatrix} X'1 \\ X'2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u$$

$$\begin{matrix} y \\ \\ \end{matrix} = \begin{matrix} C \\ \\ \end{matrix} \cdot \begin{matrix} x(t) \\ \\ \end{matrix} + \begin{matrix} D \\ \\ \end{matrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

Obsérvese que en este modelo no hay recirculación (*bypass*), por lo tanto $D = 0$.

Obviamente, para cada uno de los periodos bajo estudio Calcáreos del Caribe S.A. habrá que plantear similares sistemas de ecuaciones.

f. Se halla la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes no homogénea que en este caso, se dice:

La solución general “ $y(x)$ ” de una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes y término $u(x)$ variable es una combinación lineal de dos tipos de soluciones, una solución complementaria “ y_c ” y una solución particular “ y_p ”, así:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

La solución complementaria es de la forma $y(x) = ke^{rx}$, válida para $u(x) = 0$, mientras que la solución particular satisface la ecuación no homogénea [$my'' + b.y' + k.y = u(x)$],.

Como por regresión múltiple de los datos del Anexo 6, en escala gráfica, podemos hallar la expresión:

$$u(e) = 0,002853 + 0,135862(E/10^6) - 0,041865[(E/10^6)^2] \quad \text{ecuación 15}$$

Entonces asumimos que la solución particular “ y_p ” es también de la forma $Ax^2 + Bx + C$, con lo que la solución particular debe satisfacer la ecuación no homogénea, así:

$$\text{Sea: } 0,418y'' - 0,136y' + 0,966y = u - 40.730 \quad \text{ecuación 16}$$

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

De donde:

$$y'' - 0,325y' + 2,311y = [(u-40.730)/0,418] =$$

$$[[0,002853 + 0,135862(E/10^6) - 0,041865[(E/10^6)^2]].10^6 - 40.730] / 0,418 \quad \text{ecuación 17}$$

Por lo tanto:

$$y'' - 0,325y' + 2,311y = -90.614,833 + 325.028,708(E/10^6) - 10.000[(E/10^6)^2]$$

Si ahora decimos que:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_p' = 2A + B$$

$$y_p'' = 2A$$

Entonces:

$$2A - 0,325(2A+B) + 2,311(Ax^2+Bx+C) = -90.614,833 + 325.028,708(E/10^6) - 10.000[(E/10^6)^2]$$

Y finalmente, ecuacionando términos semejantes, tendremos:

$$2,311Ax^2 = -10.000[(E/10^6)^2] \text{ esto es: } x = (E/10^6) \text{ y también: } A = -4.327,131$$

$$[-0,325(2A) + 2,311B] = 325.028,708 \text{ o sea: } B = 139.425,776$$

$$2A - 0,325B + 2,311C = -90.614,833 \text{ de donde } C = -15.836,371$$

Por lo que la solución particular ha de ser:

$$y_p = -4.327 [(E/10^6)^2] + 139.426 (E/10^6) - 15.836$$

La cual nos permitirá calcular y' , y'' .

Validación

Sistemas hidráulicos

- a) Conocidos los valores correspondientes de V (ventas), podemos pronosticar valores reales de B (cartera), o viceversa, mediante la ecuación 8:

$$V^2 - 1,834842V - 0,083391 = - 3,125B$$

Para pasar de la escala real a la escala gráfica se procede del siguiente modo:

$$V: [(1.440.000 / 1.000.000) - 0,791048]^2 = 0,421139$$

$$B: [(230.400 / 1000) - 122,943] / 1000 = 0,107457$$

- b) La condición lineal de operación del primer tanque establece:

V_1	b_1	$R_1 = 2p/(v_1 - v_R)$	db/dt	db/dv	$tg-1$
0,20598159	0,13406196	2,1962524	0,02460355	0,45532108	24°28'51"

Para pasar de la escala gráfica a la escala real, se procede del siguiente modo:

$$B: [0,134062 \times 1000 + 122,943] \times 1.000 = 257.000 \text{ (Nivel de cartera)}$$

$$V: [(0,205982)^{1/2} + 0,791048] \times 1.000.000 = 1.244.900 \text{ (Ventas del periodo)}$$

- c) Conocidos los valores correspondientes de P (nuevos aportes de los empresarios) podemos pronosticar valores reales de A (nivel de reservas y dividendos por pagar) o viceversa, mediante la ecuación 10:

$$P^2 - 0,005546P + 0,00000769 = 0,002277A$$

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

d) La condición lineal de operación del segundo tanque establece:

P_1	a_1	$R_2 = 2p/(v_1 - v_R)$	da/dt	da/dp	tg^{-1}
0,003897706	0,030701086	0,987674994	0,000644346	0,987814554	44°38'56"

Que corresponde en la escala real:

A: $(0,030701 \times 1.000.000.000) - 8.359 = 22.342$ (Nivel de reservas y dividendos)

P: $[(0,0038977)^{1/2} \times 1.000.000] - 286.045 = - 223.613$ (Nuevos aportes del periodo)

- e) El Anexo 6 muestra la solución al sistema de ecuaciones del espacio de estados descrito por los dos tanques. En este caso, los requerimientos de aportaciones de los empresarios es mínima. El decrecimiento estable (controlado) de la variación de cartera y de nuevos aportes del último trimestre representan la base de la proyección de cada siguiente periodo.
- f) El Anexo 7 entrega la solución general en cada periodo de la ecuación diferencial del sistema mecánico que representa una estimación de los fondos aplicados al proceso para atender costos, gastos y dividendos periódicos. A partir del momento en que estos fondos superan la utilidad antes de impuestos se trata de un proceso controlado que otorga una buena base para la proyección de los siguientes periodos.

VI. Selección de índices financieros mediante la aplicación de técnicas estadísticas del análisis multivariante

El presente capítulo tiene como finalidad presentar a los contadores públicos una metodología de reducción del número de indicadores o índices financieros con los cuales hacer el análisis de las revelaciones financieras de las empresas.

Usualmente las estadísticas financieras que las entidades e instituciones comunican a sus usuarios contienen más de una decena de indicadores. En realidad no son todos ellos necesarios. Una selección apropiada de los indicadores financieros por empresas en condiciones de solvencia, puede ayudar a identificar direccionadores posibles de la política a seguir, pero también para empresas bajo riesgo de insolvencia, tal selección puede ayudar a evidenciar parámetros útiles ante procesos concordatorios.

Como antecedente de esta investigación puede decirse, que desde finales del siglo anterior se ha venido extendiendo la aplicación de la técnica estadística del ACP hacia casi todos los campos de la producción técnica (Barbosa, 2000), sin embargo, relacionado con el análisis financiero, tan solo ha sido conocido por el autor el intento realizado por los profesores Morozoni, Hein y Olinquevitch (2006) de la Universidad del Centro Oeste, sobre una lista de 99 empresas en procesos concordatorios en los juzgados de Curitiba (Paraná, Brasil), bajo la aplicación del software Matlab.

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Lo que se pretende establecer en este estudio es una respuesta al siguiente problema: *¿Cuáles son los indicadores financieros con mayor pertinencia para analizar de manera incorrelacionada su contribución al estado de redevuabilidad o de riesgo contable de las empresas?* Ello con el objetivo de recomendar a los usuarios de la información financiera cuáles deberían ser los índices financieros seleccionables para explicar de modo necesario y suficiente el estado de redevuabilidad de las empresas.

Desarrollo

Como es sabido, los analistas financieros diagnostican la situación de las empresas mediante la aplicación de unos indicadores (Rosillo, 2002), los cuales, por lo general, son los siguientes:

Indicadores de liquidez:

Liquidez General (LG) = (Activo Corriente + Activo Realizable)/Pasivo Total,

Liquidez Corriente (LC) = Activo Corriente/Pasivo Corriente,

Liquidez Seca (LS) = (Activo Corriente – Mercancías)/Pasivo Corriente.

Indicadores de riesgo:

Capital de Trabajo a Patrimonio (CTP) = (Act. Cte. – Pas. Cte.)/Patrimonio Neto,

Particip. Cap. de Terceros (PCT) = Pasivo Total/(Pasivo Total + Patrimonio Neto)

Rotación del Activo Realizable (RAR) = Activo Realizable/Ventas Netas.

Indicadores de apalancamiento:

Grado de Endeudamiento (GDE) = Pasivo Total/Patrimonio Neto,

Composición del Endeudamiento (CDE) = Pasivo Corriente/Patrimonio Neto,

Grado de Inmovilidad del Patrimonio (GIP) = Activo Fijo/Patrimonio Neto,

Indicadores de redituabilidad:

Rentabilidad sobre Ventas (RSV) = Ganancia Neta/Ventas Netas,

Rentabilidad sobre Activos (RSA) = Ganancia Neta/Activo Total,

Rentabilidad sobre Patrimonio (RSP) = Ganancia Neta/Patrimonio Neto

Metodología

El ACP pertenece a un grupo de técnicas estadísticas multivariantes. Los métodos del análisis multivariante tienen una larga tradición en la elaboración de indicadores sintéticos en materia de predicción y de medición del desarrollo.

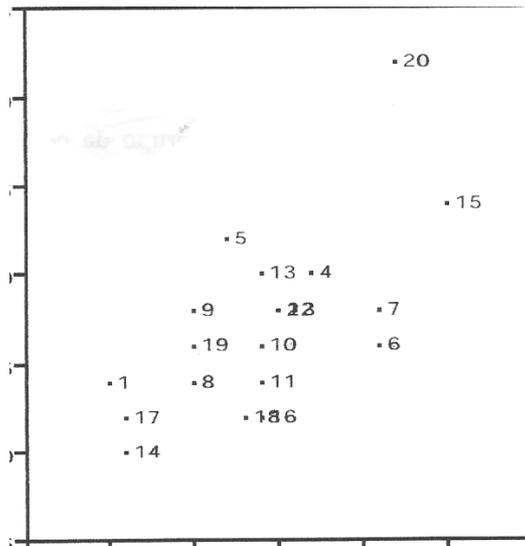
Tal como es utilizado en otras disciplinas diferentes de la contable, el objetivo más frecuente en la aplicación del ACP (Análisis de Componentes Principales) es el de reducir la dimensionalidad de la matriz de datos con el fin de evitar redundancias y destacar relaciones entre variables, construir variables no observables (indicadores sintéticos) a partir de variables observables (Castro, 2002). Otros objetivos del ACP pueden ser, descubrir interrelaciones entre los datos, proponer la utilización de los componentes incorrelacionados hallados como datos de entrada para otros análisis estadísticos más apropiados.

Los tres métodos de análisis multivariante más apropiados para salvar la vaguedad de las estadísticas financieras, desde la eliminación de variables hasta la rotación o selección de factores, son el Análisis de Componentes Principales (ACP), el Análisis de la Distancia (AD2) y la Agregación de los Conjuntos Difusos (ACD).

El Análisis de Componentes Principales (ACP) consiste en encontrar transformaciones ortogonales de las variables originales (índices financieros) para conseguir un nuevo conjunto de variables no correlacionadas (componentes).

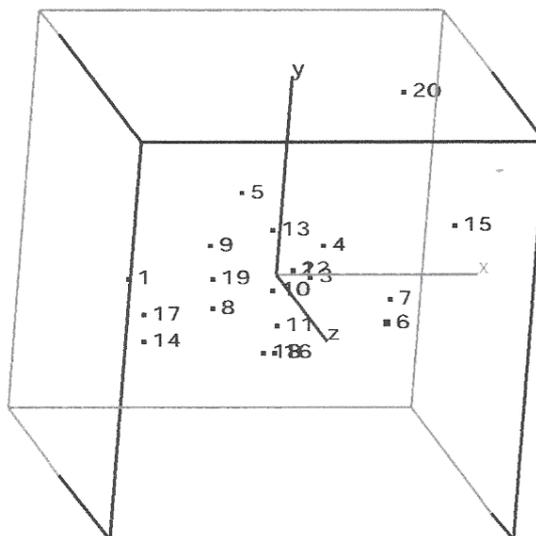
CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Figura 11. Ejemplo de diagrama de dispersión de las variables LC y LS aplicadas sobre veinte empresas



Fuente: Villardón, 2002

Figura 12. Ejemplo de representación tridimensional de las variables LC (x), LS (y) y RAR (z)

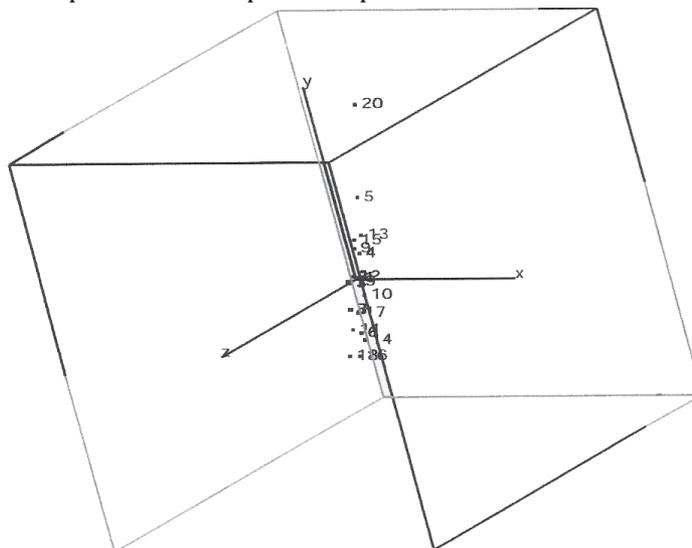


Fuente: Villardón, 2002

Mediante un programa de ordenador que permita el movimiento de la figura al tiempo que vemos las posiciones relativas de los puntos, observaremos cierta agrupación en la que la nube de puntos estará prácticamente sobre un plano en función de su relación entre sí.

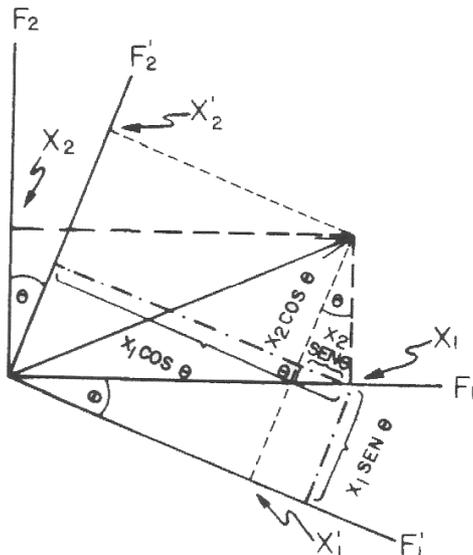
Cuando encontremos este plano de referencia se definen dos vectores perpendiculares (ortogonales), uno de ellos (y) escogido en la dirección en que más varían los datos y el otro (x) recogiendo la mayor variabilidad posible. Sobre este plano ortogonal es posible interpretar las distancias entre los puntos en términos de similitud, buscar conjuntos de individuos similares, etc., con la garantía de que la pérdida de información es mínima y de que hemos recogido las fuentes de variabilidad más importantes en el conjunto de datos. La pérdida de información se entiende como la diferencia en las interdistancias calculadas entre los puntos del espacio original y las calculadas en la proyección sobre el plano de referencia, o sea, la variabilidad del conjunto de puntos.

Figura 13. Ejemplo de rotación de la representación tridimensional que muestra la aproximación de los puntos a un plano referencial



Fuente: Villardón, 2002

Figura 14. Ejemplo de geometría de la rotación de una matriz de datos inicial F1F2



Fuente: Barbosa, 2000

Obviamente, las variables en términos de vectores, quedan proyectadas sobre los ejes ortogonales del sistema de referencia como nuevas variables, cuya longitud o magnitud de valores alcanzados en su agrupamiento sobre los ejes, determinan un peso o carga de cada variable representativo del número mínimo de causas que condicionan un máximo de variabilidad existente. Si originalmente consideramos cada variable medida, correlacionada con otras, los nuevos datos ahora situados sobre un eje de variabilidad que también pasa por sus agrupamientos, seguirán describiendo la misma variabilidad total existente, con el mismo número de ejes originales pero ya no más correlacionados entre sí.

Sobre estos agrupamientos, pueden pasar ejes del sistema de referencia denominados *factores*, cuyo valor de carga revela el *factor de carga* de la variable respecto de las otras. A aquel agrupamiento que tenga el máximo peso de

carga encontrado corresponde su ubicación paralelamente como eje principal del sistema de referencia. El segundo eje de maximización es colocado ortogonalmente y, así sucesivamente se van obteniendo los factores, cuyas cargas vienen siendo, combinaciones lineales de las variables originales.

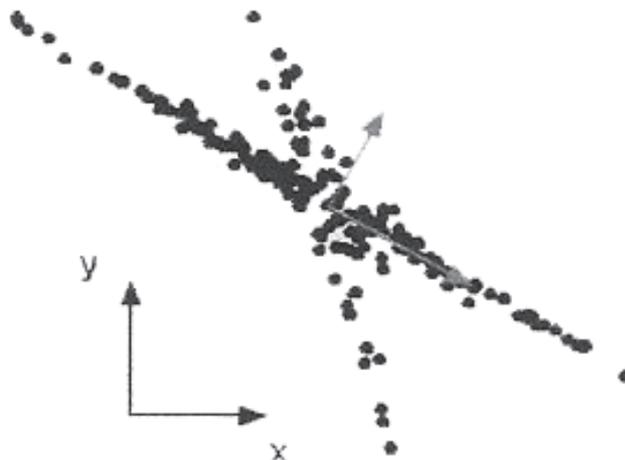
Una apreciación vagamente similar de abordar el procedimiento seguido por el ACP es la manera de explorar una ciudad: conducir por la carretera el trayecto más largo que la atraviesa. Cuando encuentre a otra gran carretera, gire a la izquierda o la derecha y siga por ese camino, y así sucesivamente. En esta analogía, el ACP requiere que cada nueva carretera a ser explorada deba ser perpendicular a la anterior, pero claramente este requerimiento es demasiado riguroso y los datos, o la ciudad, puede disponerse a lo largo de ejes no ortogonales, como los de la Figura 15.

En otra situación que pareciera introducirnos al mismo problema, considere el seguimiento de una persona en una rueda de la fortuna, como se ve en la Figura 16. Los puntos de los datos podrían ser limpiamente descritos por una única variable, el ángulo de precesión de la rueda, sin embargo aquí tampoco el ACP podrá manejar esta variable. En estos dos ejemplos, vemos cómo a veces, el ACP es un método insatisfactorio.

Para dirimir esta paradoja, debemos definir lo que consideramos resultados óptimos. En el contexto de la reducción dimensional, una medida exitosa es el grado al cual una representación reducida puede predecir los datos originales. En términos estadísticos debemos definir una función de error común, en la que el error cuadrado medio, el ACP, provee la representación reducida óptima de los datos. Esto significa que con la selección de las direcciones ortogonales para los componentes principales obtenemos la mejor solución para predecir los datos originales.

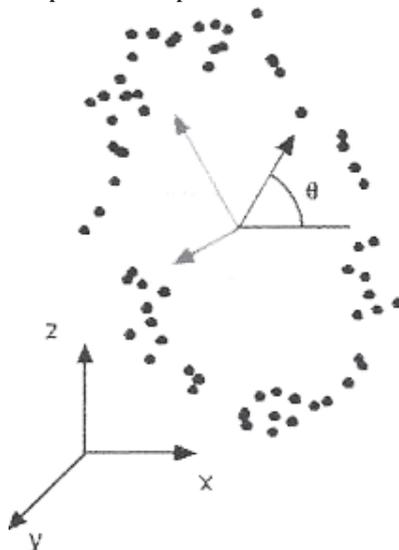
CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Figura 15. Analogía de fallo del ACP. Arreglo de calles de una ciudad sobre ejes no ortogonales



Fuente: Shlens, 2009

Figura 16. Analogía de fallo del ACP. Transporte de una persona en la precesión de rueda de la fortuna



Fuente: Shlens, 2009

En los ejemplos dados por la figura, nuestra intuición dirá que este resultado es engañoso. La solución a esta paradoja radica en el objetivo que tengamos en mente. El objetivo del ACP es descorrer los datos, es decir, quitar las dependencias de segundo orden que tengan los datos. Estadísticamente hablando, la rotación de los ejes lo que ha hecho es ubicar las proyecciones de cada variable, ya junto al extremo ora junto al origen, en los nuevos ejes factoriales ortogonales maximizando con ello la varianza de las cargas.

En las analogías citadas tenemos que existen dependencias de mayor orden entre los datos, por lo tanto la remoción de las dependencias de segundo orden son insuficientes para revelar toda la estructura de relaciones entre los datos (Shlens, 2009).

Interludio matemático

La esencia matemática del ACP es el cálculo de los autovalores y los correspondientes autovectores de las matrices cuadradas $p \times p$ denominadas de correlaciones o de covarianzas de la matriz original. Las matrices de covarianza se utilizan mayormente cuando los datos son dimensionalmente homogéneos. La aplicación de las matrices de correlaciones se recomienda cuando las variables muestran grandes diferencias de valores medios o expresan muy diferentes unidades de medida.

Cuando las escalas de las variables no permiten una comparación directa de las mediciones involucradas, se hace necesaria la estandarización preliminar de los datos de modo que las variables así transformadas tienen un valor medio de cero y la unidad como varianza. En tal caso las matrices de covarianzas y de correlaciones se hacen idénticas (Bronson, 1994).

Siguiendo con la etapa matemática del ACP, se extraen los autovalores y los

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

autovectores de una matriz \mathbf{A} de varianzas y covarianzas con términos a_{ij} , siendo \mathbf{I} la matriz identidad, \mathbf{V}_i su i ésimo vector de términos v_{ij} y λ_i el i ésimo vector, por lo que podemos escribir:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{V}_i = 0 \quad (1)$$

Alternativamente, se pueden escribir las siguientes ecuaciones simultáneas (Barbosa, 2000) formadas por la matriz de coeficientes a_{ij} multiplicadas por un vector de términos v_{ij} desconocidos, que son iguales al vector \mathbf{V}_i multiplicado por una constante λ :

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_i \lambda_i = [\mathbf{A}] [\mathbf{V}] = [\mathbf{V}] [\Lambda] \quad (2)$$

Siendo $[\mathbf{V}]$ una matriz $p \times p$ de todos los autovectores y, $[\Lambda]$ una matriz $p \times p$ con los autovalores λ_i en la diagonal principal multiplicando ambos términos de la ecuación por la transpuesta de \mathbf{V} , tendremos:

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{V}] [\Lambda] [\mathbf{V}]^t \quad (3)$$

En una matriz de varianza-covarianza, las varianzas individuales constituyen los elementos de la diagonal principal, por lo tanto, basta sumarlos para hallar el *arreglo punteado de la matriz* para obtener la variabilidad total e inmediatamente la contribución de cada variable.

$$\sum \lambda_i = \sum a_{ij} \quad (4)$$

siendo por definición:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_p$$

Lo cual, en palabras, se dice: “*En una matriz de varianza-covarianza, la suma de autovalores es igual al arreglo punteado de la matriz y representa la variabilidad total de la misma y también determina la contribución de cada autovalor en términos de variabilidad*”. El primero de los autovalores corresponde a la mayor variabilidad posible existente, el segundo a la mayor variabilidad posible restante y, así sucesivamente.

Ahora, recíprocamente, en términos geométricos, se dice que el primer autovalor representa al eje principal de mayor longitud, el segundo valor a la segunda longitud situada en posición ortogonal respecto del primero y, así sucesivamente (Barbosa, 2000).

De este modo, al multiplicar la matriz de los datos originales por la matriz de autovectores, se obtiene una matriz de datos transformados que representan la proyección de los puntos, en un espacio multidimensional, sobre las diversas componentes principales.

Justificación

También en la contabilidad financiera, cabe la utilización de modelos capaces de determinar el comportamiento colectivo de un conjunto de variables interrelacionadas a través de la determinación de estructuras latentes de forma que sus efectos no pueden interpretarse únicamente por separado. Inicialmente, estas variables son los índices financieros, del más puro saber contable (Warren, Reeve & Duchac, 2011).

Sería deseable para el análisis financiero poder trabajar con agrupaciones adecuadas de los índices financieros para representar en ellos todas las propiedades relacionadas con la medición buscada, logrando que estas nuevas variables agrupadas puedan medir adecuadamente los estados fenomenoló-

gicos en el momento del tiempo a que se refiere y que la medición obtenida sea objetiva, no necesitándose más indicadores de percepción experta para el conocimiento del problema (Pérez, 2010).

Procedimiento

En este trabajo se busca reducir la cantidad de datos de 63 empresas colombianas emisoras de valores en buenas condiciones de redituabilidad (con índices de rendimiento sobre ventas, activos totales y/o patrimonio neto, positivos) y de otras 43 empresas en riesgo contable (con índices de rendimiento contable negativos o nulos y por ello en riesgo de no lograr los objetivos del ciclo contable), mediante igual procedimiento de la técnica estadística del ACP.

Estos datos son de publicación anual obligatoria por el Sistema de Información del Mercado de Valores (SIMEV) de la Superintendencia Financiera, sin embargo, en este estudio no interesa resaltar el desempeño de periodo alguno ni mucho menos reivindicar alguna empresa por lo que se ha preferido omitir en qué año se cumplieron los datos y a cuáles empresas estuvieron referidos.

Se parte entonces, de las siguientes tablas de índices financieros (Rosillo, 2002) sacados de las revelaciones contables de las empresas colombianas, publicadas por el SIMEV, para someterlas al tratamiento estadístico del ACP utilizando para ello el software Minitab, una marca registrada de IBM.

Para introducir los datos en el software Minitab, se siguen las siguientes instrucciones:

(Estadística>Regresión>Regresión: se introducen los datos),
(Gráficas>Residuos para gráficas>estandarizado),
(Gráficas de residuos>Gráficas individuales>Histograma de residuos>gráfica normal de residuos>Residuos versus ajustes>)

Tabla 12. Razones financieras de las empresas colombianas en condiciones de redituabilidad

	LG	LC	LS	CTP	PCT	RAR	GDE	CDE	GIP	RSV	RSA	RSP
1101	5,799	3,700	2,300	0,9180	0,2500	1,3365	0,3500	0,3400	0,1420	0,0900	0,1100	0,1500
1102	1,254	1,780	0,970	0,2028	0,3600	0,4107	0,5600	0,2600	1,0928	0,0300	0,0200	0,0300
1103	4,221	19,140	0,770	1,2698	0,2400	0,3232	0,3300	0,0700	0,0352	0,0800	0,0300	0,0300
1104	1,692	1,080	1,010	0,3344	0,8100	0,2252	5,1400	4,1800	1,8313	0,0850	0,0500	0,2600
1501	1,409	1,040	0,750	0,0456	0,5800	0,0780	1,4000	1,1400	1,2282	0,0100	0,0300	0,0600
1502	1,410	1,350	0,910	0,0875	0,2800	0,4704	0,3900	0,2500	1,0554	0,0600	0,0500	0,0700
1503	1,157	1,460	1,010	0,0782	0,2600	0,6302	0,3600	0,1700	1,1364	0,1100	0,0600	0,0900
1504	1,145	2,100	1,620	0,1430	0,2900	0,6975	0,4200	0,1300	1,1753	0,0400	0,0200	0,0200
1505	0,894	1,470	0,830	0,0611	0,2400	0,4739	0,3300	0,1300	1,1839	0,0400	0,0200	0,0200
1506	0,874	1,580	0,910	0,1334	0,3900	0,2386	0,6500	0,2300	1,3033	0,0500	0,0400	0,0600
1507	1,551	1,520	0,800	0,0468	0,1100	1,0293	0,1300	0,0900	1,0450	0,2100	0,0900	0,1000
1508	1,644	1,130	0,780	0,0624	0,3500	0,3325	0,5400	0,4800	1,0005	0,0400	0,0500	0,0700
1509	6,206	3,750	3,510	0,4950	0,1700	7,4168	0,2100	0,1800	0,5603	0,2100	0,0700	0,0900
1510	1,040	1,510	1,140	0,0663	0,2400	1,4003	0,3200	0,1300	1,1370	0,2600	0,0600	0,0900
1601	1,087	2,330	0,780	0,0798	0,1500	1,8100	0,1700	0,0600	0,9935	0,1600	0,0200	0,0300
1701	2,391	2,400	1,170	0,2940	0,2300	0,6817	0,3100	0,2100	0,8438	0,0700	0,0600	0,0800
1702	2,690	1,780	1,000	0,3978	0,3300	0,4520	0,5100	0,5100	0,6377	0,0300	0,0400	0,0700
2101	3,309	3,010	2,230	0,2814	0,1800	1,1423	0,2200	0,1400	0,8008	0,0200	0,0200	0,0200
2102	1,579	1,360	0,940	0,0576	0,1900	1,2867	0,2300	0,1600	0,9929	0,0500	0,0200	0,0300
2103	1,225	1,830	1,120	0,1909	0,3500	0,4452	0,5500	0,2300	1,1505	0,0300	0,0200	0,0200
2201	2,064	1,780	1,700	0,1170	0,2000	3,1872	0,2500	0,1500	0,9830	0,2000	0,0500	0,0600
2202	1,331	1,180	0,780	0,0630	0,3300	0,5757	0,5100	0,3500	1,1325	0,0500	0,0300	0,0400
2203	0,852	0,860	0,560	-0,059	0,4100	0,2917	0,6900	0,4200	1,3217	0,0300	0,0200	0,0300
2301	2,676	1,830	1,420	0,4897	0,4100	1,3510	0,7100	0,5900	0,6520	0,0200	0,0100	0,0200
2302	1,133	1,200	0,730	0,0640	0,3300	0,1216	0,5000	0,3200	1,1312	0,0500	0,1000	0,1500
2303	1,044	1,220	0,670	0,1210	0,4700	0,0419	0,8900	0,5500	1,2226	0,0300	0,1100	0,2000
2501	3,520	2,090	1,470	0,2834	0,2000	1,7024	0,2600	0,2600	0,7566	0,0600	0,0400	0,0500
2502	2,822	2,000	1,260	0,2300	0,2100	0,8355	0,2600	0,2300	0,7781	0,0300	0,0300	0,0400
2601	1,527	1,270	0,860	0,1809	0,4800	0,3966	0,9300	0,6700	1,0866	0,0500	0,0400	0,0700
2602	1,450	1,010	0,460	0,0111	0,5200	0,3336	1,1100	1,1100	1,0135	0,0800	0,0500	0,1400
2603	1,423	1,890	1,300	0,0445	0,1000	5,7548	0,1100	0,0500	1,0055	0,6800	0,0600	0,0700
2604	2,456	2,180	1,300	0,3068	0,2600	1,2958	0,3600	0,2600	0,8178	0,1200	0,0600	0,0800
2605	1,152	1,010	0,940	0,0003	0,0500	17,875	0,0500	0,0300	0,9697	2,7500	0,0800	0,0800
2606	0,942	0,770	0,580	-0,039	0,1900	1,4928	0,2400	0,1700	1,1323	0,4200	0,0900	0,1200

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

2607	1,333	1,270	0,790	0,0432	0,1800	1,9624	0,2400	0,1600	1,1301	0,0500	0,0100	0,0100
2608	0,510	1,180	0,570	0,0288	0,3500	0,3117	0,5400	0,1600	1,3541	0,1500	0,0500	0,0800
2609	1,098	0,870	0,460	-0,091	0,3700	0,4456	0,8100	0,7000	1,5802	0,2100	0,0900	0,1500
2610	0,411	0,960	0,550	-0,012	0,5200	0,1389	1,0800	0,3000	1,7889	0,0400	0,0200	0,0300
2611	2,453	3,270	1,850	0,2724	0,2000	1,4131	0,2500	0,1200	0,8576	0,0800	0,0400	0,0500
2612	2,780	1,680	1,130	0,2652	0,2800	0,7914	0,3900	0,3900	0,7377	0,0500	0,0500	0,0700
2701	1,792	1,890	0,980	0,1424	0,2000	0,7765	0,2500	0,1600	0,9476	0,0500	0,0300	0,0400
2801	1,839	1,580	0,820	0,1972	0,3000	0,4293	0,4400	0,3400	0,9295	0,0300	0,0300	0,0400
4501	1,965	1,330	1,200	0,4851	0,6300	0,7201	1,8100	1,4700	0,9179	0,1600	0,0700	0,1600
4502	2,750	1,420	1,420	0,5922	0,5700	0,2547	1,4100	1,4100	0,4715	0,0600	0,1300	0,3600
4503	2,055	1,090	1,080	0,2070	0,7000	0,2213	2,3500	2,3000	0,8501	0,0300	0,0400	0,1300
5101	1,974	1,360	0,990	0,5436	0,6400	0,0988	1,7900	1,5100	0,7433	0,0100	0,0300	0,0800
5201	1,099	1,050	0,240	0,0195	0,3100	0,0668	0,4400	0,3900	1,0099	0,0400	0,0700	0,1000
5202	1,101	1,020	0,340	0,0074	0,3000	0,1252	0,4300	0,3700	1,0559	0,0400	0,0500	0,0700
5203	1,090	0,930	0,420	-0,029	0,3000	0,0777	0,4400	0,4100	1,0854	0,0200	0,0400	0,0500
5204	2,057	1,230	1,050	0,7360	0,7500	0,1978	3,2200	3,2000	0,3573	0,0300	0,0300	0,0800
5501	1,161	1,700	1,570	0,0490	0,1600	1,3467	0,1900	0,0700	1,0685	0,0600	0,0200	0,0300
5502	3,170	1,780	1,420	0,5928	0,4300	1,3539	0,7600	0,7600	0,4146	0,1200	0,0700	0,1200
6201	3,060	1,790	1,340	0,6320	0,4400	0,2822	0,8000	0,8000	0,3862	0,0400	0,1000	0,1800
6501	1,052	1,120	1,120	0,0228	0,2700	2,6245	0,3900	0,1900	1,2316	0,3600	0,0500	0,0700
6502	5,475	4,920	1,010	0,5880	0,1400	4,4612	0,1600	0,1500	0,4049	0,0600	0,0100	0,0100
6503	8,270	6,910	1,380	0,4728	7,0000	3,7778	0,0800	0,0800	-0,541	0,0300	0,0100	0,0100
6504	5,530	5,220	0,330	0,2532	0,0500	2,4371	0,0600	0,0600	0,8868	0,2500	0,0300	0,0300
6505	1,447	3,630	0,370	0,2104	0,1800	0,5564	0,2200	0,0800	0,9318	0,1600	0,0300	0,0400
6506	6,921	6,460	1,080	0,6006	0,1100	1,7842	0,1200	0,1100	0,3803	0,0200	0,0100	0,0100
8001	0,476	0,600	0,580	-0,088	0,2900	0,3542	0,4300	0,2200	1,3508	0,0600	0,0200	0,0300
8501	2,610	1,790	1,700	0,3555	0,3600	0,9242	0,6000	0,4500	0,8612	0,0700	0,0600	0,0800
8502	2,222	1,250	1,250	0,6150	0,7300	0,1253	2,6900	2,4600	0,6099	0,0300	0,0700	0,0260
9201	1,305	1,520	1,370	0,0676	0,2100	0,8690	0,2800	0,1300	1,1357	0,1300	0,0700	0,0900

Fuente: SIMEV, Superintendencia Financiera de Colombia

Si se parte de variables con las mismas unidades de medida, se puede realizar el análisis con base en la matriz de covarianzas, pero las variables con varianzas muy elevadas introducirán un sesgo que domina los componentes iniciales, siendo por ello que se hace preferible extraer los componentes de la

matriz de correlaciones muestrales R (de los Coeficiente de Correlación), lo que equivale a hacerlo a partir de la matriz inicial con los valores estandarizados, concediendo a todas las variables la misma importancia (Castro, 2002).

En la Tabla 13, se muestran los valores y vectores propios de la matriz de covarianza de los componentes principales en condiciones de redituabilidad que arroja la máquina:

Tabla 13. Análisis de los valores propios de la matriz de covarianza de los componentes principales en condiciones de redituabilidad

	CP1	CP2	CP3	CP4	CP5	CP6	CP7	CP8	CP9	CP10	CP11	CP12
Valor	8,110	6,154	1,720	1,097	0,557	0,174	0,061	0,011	0,008	0,003	0,001	0,000
Frac.	0,453	0,344	0,096	0,061	0,031	0,010	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
Acum.	0,453	0,797	0,893	0,955	0,986	0,995	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Fuente: S. Pérez, 2013. Elaboración propia utilizando Minitab

Obsérvese cómo en la Tabla 13 (Condiciones de Redituabilidad), basta acumular solamente hasta el CP8 para explicar la variación total contenida en los componentes y llegar al nivel máximo del 100 %.

Se procede de igual manera para el siguiente grupo de datos (ver Tabla 14):

Tabla 14. Análisis de los valores propios de la matriz de covarianza de los componentes principales en riesgo contable

	CP1	CP2	CP3	CP4	CP5	CP6	CP7	CP8	CP9	CP10	CP11	CP12
Valor	294,4	17,04	1,600	0,860	0,460	0,310	0,060	0,040	0,010	0,000	0,000	0,000
Frac.	0,935	0,054	0,005	0,003	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Acum.	0,935	0,989	0,994	0,997	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Fuente: Fuente: Fuente: S. Pérez, 2013. Elaboración propia utilizando Minitab

En la Tabla 15, se muestran los valores y vectores propios de la matriz de covarianza de los componentes principales en condiciones de riesgo contable:

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Tabla 15. Razones financieras de las empresas colombianas en riesgo contable

	LG	LC	LS	CTP	PCT	RAR	GDE	CDE	GIP	RSV	RSA	RSP
1105	2,590	2,250	0,4100	0,0250	0,0200	0,0000	0,0200	0,0200	0,9550	0,0300	0,0000	0,0000
1106	0,953	0,980	0,3500	-0,001	0,0700	0,0000	0,0800	0,0600	1,0841	-0,030	0,0000	0,0000
1107	0,260	0,580	0,2700	-0,151	0,5300	0,2475	1,1500	0,3600	1,9610	-0,680	-0,100	-0,220
1511	0,489	1,390	0,4100	0,1599	0,6000	0,0676	1,5000	0,4100	1,9301	-0,170	-0,110	-0,260
1512	0,765	1,270	0,6700	0,0567	0,3500	0,3418	0,5300	0,2100	1,2476	-0,020	-0,010	-0,010
1704	1,870	1,020	0,8600	0,0128	0,3900	1,0366	0,6400	0,6400	0,9882	-0,020	-0,010	-0,020
1705	0,271	0,099	0,5300	-0,261	0,3800	0,4490	0,6400	0,2900	1,6555	-0,130	-0,040	-0,070
1706	1,187	2,670	1,3300	0,6012	0,5400	0,3949	1,2100	0,3600	1,2795	-0,200	-0,090	-0,200
1707	1,565	1,960	1,3300	0,4320	0,4800	0,8774	0,9400	0,4500	1,0763	-0,190	-0,070	-0,140
1708	1,320	1,380	0,9900	0,0836	0,2800	112,68	0,3900	0,2200	1,0893	-0,260	-0,090	-0,120
1709	0,925	1,220	0,7500	0,0924	0,4700	0,5081	0,8900	0,4200	1,3812	-0,110	-0,040	-0,080
1710	0,785	0,860	0,5200	-0,088	0,5200	0,3245	1,1000	0,6300	1,5736	-0,140	-0,060	-0,140
1711	2,053	2,160	1,3300	0,4060	0,3700	0,0000	0,5900	0,3500	0,8386	0,0000	0,0000	0,0000
1712	1,825	1,570	1,0700	0,2223	0,3600	0,0000	0,5600	0,3900	0,9433	-0,030	0,0000	-0,010
1713	2,219	1,560	1,5200	0,3360	0,4500	3,1812	0,8300	0,6000	0,9084	-0,160	-0,030	-0,050
2204	0,731	1,100	0,9400	0,0560	0,6000	0,0000	1,5400	0,5600	1,9507	0,0000	0,0100	0,0100
2401	1,643	1,230	0,9500	0,1564	0,4700	0,0000	0,8900	0,6800	1,0572	0,0000	0,0000	0,0100
2504	1,784	2,060	1,2800	0,3816	0,4000	0,6081	0,6700	0,3600	0,9334	-0,060	-0,040	-0,060
2613	0,454	0,950	0,9100	-0,009	0,3600	-2,170	0,6700	0,1700	1,6996	-0,170	0,0100	0,0000
2702	1,033	1,050	0,5100	0,0230	0,3900	0,3452	0,6900	0,4600	1,2862	-0,070	-0,040	-0,080
2703	0,442	0,950	0,3400	-0,039	0,6800	0,1351	2,2400	0,7800	2,5531	-0,550	-0,140	-0,440
2704	1,889	1,550	0,9600	0,1430	0,2500	0,0000	0,3400	0,2600	0,9570	0,0000	0,0000	0,0000
2802	0,757	0,770	0,4500	-0,389	0,7200	0,1105	2,6800	1,6900	2,4209	-0,030	-0,020	-0,120
2803	1,655	1,810	0,3800	0,6642	0,5200	0,0000	1,0800	0,8200	0,5927	0,0000	0,0000	0,0100
3101	0,556	1,020	0,6200	0,0098	0,5800	0,3764	1,4100	0,4900	1,9312	-0,270	-0,060	-0,160
5001	1,404	1,150	0,4600	0,1470	0,4800	0,1227	1,1100	0,9800	1,1855	-0,020	-0,030	-0,120
5002	2,187	1,530	0,9500	0,7844	1,0100	0,3909	1,5700	1,4800	-0,709	-0,580	-0,430	-0,080
5503	0,900	0,740	0,5400	-0,026	0,1100	0,0000	0,1200	0,1000	1,0169	0,0000	0,0000	0,0000
5504	0,066	0,022	0,1800	-0,861	0,5500	0,0449	1,2300	0,8800	2,2170	-0,060	-0,030	-0,060
6401	0,530	0,500	0,5000	-0,405	0,5800	0,2635	1,4200	0,8100	2,0433	-0,130	-0,050	-0,110
6507	3,173	9,740	8,2700	0,2622	0,1400	9,9427	0,1700	0,0300	0,9221	-0,080	-0,010	-0,010
6508	11,560	8,520	3,0900	0,6768	0,0800	4,8807	0,0900	0,0900	0,3582	-0,070	-0,040	-0,040
6509	12,773	14,110	3,0100	0,7866	0,0700	8,1111	0,0800	0,0600	0,2963	-0,160	-0,040	-0,050
6510	7,025	13,160	0,9300	0,6080	0,0900	2,2250	0,1000	0,0500	0,4531	-0,110	-0,020	-0,020
6511	5,960	6,760	0,7000	0,6912	0,1300	0,7200	0,1500	0,1200	0,3426	-0,030	-0,020	-0,020
6512	5,650	5,250	0,4100	0,6375	0,1300	1,0435	0,1500	0,1500	0,3663	-0,120	-0,040	-0,040
6513	3,168	3,250	0,4000	0,3150	0,1400	1,0233	0,1600	0,1400	0,6879	-0,220	-0,060	-0,060
6514	4,820	2,500	2,5000	2,0700	0,5000	4,5808	1,4000	1,3800	-0,650	-0,420	-0,090	-0,180
6515	2,911	4,440	0,3000	0,2752	0,1100	0,7107	0,1300	0,0800	0,8266	-0,270	-0,060	-0,070
6515	2,938	3,020	0,3200	0,3030	0,1400	0,9611	0,1700	0,1500	0,7613	-0,370	-0,090	-0,010
6516	3,750	3,420	0,3400	0,6534	0,2200	0,9094	0,2700	0,2700	0,3039	-0,210	-0,060	-0,070
6517	2,133	2,250	0,3800	0,3500	0,2500	5,6000	0,3400	0,2800	0,7300	-1,340	-0,050	-0,060
7101	2,130	2,170	0,7200	0,0351	0,0400	0,0000	0,0400	0,0300	0,9349	0,0500	0,0000	0,0000

Fuente: SIMEV, Superintendencia Financiera de Colombia

Obsérvese como en la Tabla 14 (Riesgo Contable) se requiere acumular hasta el CP6 para explicar la variación total.

En las Tablas 13 y 15 puede verse cómo los componentes obtenidos están jerarquizados con base en la información que incorporan, la cual ha sido medida según el porcentaje de varianza total explicada sobre la matriz de los datos originales. La fila “Acumulada”, en la que se registra la integración de los componentes es la que conducirá a la reducción de la dimensión de los datos originales.

Resultados

1. Método de la covarianza

Pasamos ahora al análisis en el espacio de las variables. La siguiente tabla señala los resultados obtenidos sobre la muestra de empresas en redituabilidad, siguiendo el método de la covarianza:

Tabla 16. Matriz de variabilidades máximas de cada índice financiero en condiciones de redituabilidad sobre los componentes principales según método de covarianza

	LG	LC	LS	CTP	PCT	RAR	GDE	CDE	GIP	RSV	RSA	RSP
CP1	0,424	0,756	0,060	0,055	0,081	0,459	-0,094	-0,077	-0,092	0,038	-0,001	-0,005
CP2	0,105	0,472	-0,033	0,043	0,037	-0,861	0,053	0,042	-0,031	-0,119	-0,002	-0,000
CP3	-0,736	0,384	-0,169	-0,067	-0,353	0,067	-0,242	-0,263	0,132	0,067	-0,002	-0,011
CP4	-0,287	0,219	-0,071	0,068	0,001	0,151	0,684	0,602	0,046	0,072	0,002	0,021
CP5	-0,269	0,048	-0,287	-0,106	0,902	0,025	-0,069	-0,100	-0,008	0,033	-0,007	-0,012
CP6	-0,293	0,061	0,918	0,085	0,209	-0,012	0,008	-0,054	-0,070	-0,090	0,004	0,003
CP7	0,147	0,042	0,108	-0,383	0,039	0,014	0,214	-0,182	0,844	-0,151	-0,028	-0,026
CP8	-0,059	0,027	-0,041	-0,407	-0,042	0,103	-0,187	0,305	-0,205	-0,758	-0,131	-0,234
CP9	0,035	0,038	0,140	-0,610	-0,009	-0,079	-0,342	0,433	-0,023	0,491	0,108	0,206
CP10	0,025	-0,004	0,053	-0,106	-0,013	-0,051	0,066	-0,037	-0,056	0,353	-0,333	-0,859
CP11	0,009	0,003	0,003	-0,520	-0,076	-0,008	0,504	-0,483	-0,455	0,034	-0,000	0,169
CP12	-0,000	-0,001	0,007	0,038	0,003	-0,005	-0,041	0,028	0,021	0,042	-0,927	0,367
Sum	2,389	2,055	1,890	2,488	1,765	1,835	2,504	2,606	1,983	2,248	1,545	1,913
Frac	0,312	0,998	0,682	0,116	0,721	0,446	0,611	0,541	0,526	0,502	0,074	0,400

Fuente: S. Pérez, 2013. Elaboración propia utilizando Minitab

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

En el espacio de las variables, el análisis tiene sentido si existen variabilidades positivas de las variables, ya que esto es indicativo de su mayor incidencia sobre la variabilidad absoluta total, y por tanto los demás factores tendrán poca incidencia (Villarroel, Álvarez & Maldonado, 2003).

El primer paso del análisis consiste en calcular la suma de los valores absolutos de las correlaciones de cada vector de variables, o sea la variabilidad de las combinaciones lineales de las variables originales. También, se calcula el cociente entre la suma de las variabilidades positivas y esta variabilidad total correspondiente, o sea la proporción de variabilidad absorbida por cada variable.

Aquellas variables no correlacionadas que muestran una variabilidad nula o negativa son candidatas a ser eliminadas del análisis (Morozoni, Olinquevitch & Hein, 2006), mientras que aquellas otras que mantienen una correlación positiva propician grados de interpretación por separado, es decir, sin asociación a indicadores sintéticos (Castro, 2002).

De la Tabla 16 resulta que las mayores correlaciones positivas las presentan las parejas:

LC-CP1, PCT-CP5, LS-CP6, **GDE-CP4** y **GIP-CP7**

Tabla 17. Matriz de variabilidades máximas de cada índice financiero en riesgo contable sobre los componentes principales según método de covarianza

	LG	LC	LS	CTP	PCT	RAR	GDE	CDE	GIP	RSV	RSA	RSP
CP1	-0,003	-0,004	-0,007	-0,000	0,001	-0,975	0,004	0,002	0,002	0,223	0,000	0,000
CP2	-0,616	-0,750	-0,171	-0,058	0,029	-0,014	0,074	0,036	0,094	-0,090	-0,001	-0,005
CP3	-0,560	0,300	0,735	-0,066	0,017	0,033	0,052	-0,014	0,143	0,164	0,006	-0,002
CP4	-0,430	0,544	-0,583	-0,201	-0,040	-0,035	-0,061	-0,145	0,288	-0,167	0,012	-0,005
CP5	0,185	0,020	-0,023	-0,103	0,200	0,006	0,734	0,362	0,489	0,003	-0,021	-0,076
CP6	0,282	-0,222	0,131	-0,466	-0,162	0,032	-0,315	-0,339	0,607	0,147	0,070	0,026
CP7	-0,044	0,032	-0,125	-0,605	0,011	0,100	-0,134	0,532	-0,293	0,435	0,008	0,172
CP8	0,075	0,001	0,221	-0,491	0,224	-0,171	-0,020	0,015	-0,192	-0,739	-0,202	0,027
CP9	-0,005	-0,014	-0,091	-0,151	0,610	0,082	0,151	-0,506	-0,182	0,356	-0,337	-0,193
CP10	0,009	0,002	-0,004	0,092	0,429	-0,005	0,009	-0,114	0,051	-0,027	0,402	0,793
CP11	-0,004	-0,009	-0,007	-0,210	-0,567	0,011	0,532	-0,392	-0,270	0,048	-0,097	0,337
CP12	-0,002	-0,000	-0,010	0,207	-0,048	0,008	-0,163	0,160	0,221	0,033	-0,818	0,429
	2,156	1,928	1,823	2,650	2,240	1,028	2,378	2,758	2,895	1,864	1,949	2,065
	0,520	0,877	0,608	0,233	0,340	0,012	0,545	0,669	0,721	0,543	0,472	0,748

Fuente: S. Pérez, 2013. Elaboración propia utilizando Minitab

La Tabla 17 presenta como sus mayores correlaciones positivas, las parejas:

LC-CP4, GIP-CP6, LS-CP3, GDE-CP5 y RSV-CP1

El análisis multivariante clásico se centra en la evaluación de la interdependencia entre pares de variables, pero además de haber tenido en cuenta su magnitud (relación entre variables) y el signo (tipo de relación), nos encontramos que se requiere de experiencia para lograr las selecciones más apropiadas de las variables mejores representativas de la variabilidad de los datos, que sean capaces de separar variables que sugieren los mismos aspectos de los indicadores sintéticos, aunque en diferente forma y por ello, también pudieran ser utilizables como datos de entrada para otros análisis (Shlens, 2009).

Como en el caso que nos ocupa no se hacen referencias a condicionamientos especiales, el investigador ha quedado en libertad para interpretar su propio querer. El criterio aquí aplicado, para la selección de las variables mejor proporcionadas como para asumir una representación explicativa de la variabilidad de los datos, son aquellos índices comunes a las tablas de las empresas en redituabilidad y en riesgo contable, estos son: LC, GIP y GDE.

A veces, los investigadores disponen de información adicional que amplía la matriz de datos originales con otros atributos de los individuos, o también nuevos individuos para los que se conozcan las variables analizadas (Villardón, 2003). A estos datos adicionales se les llama suplementarios o ilustrativos porque no forman parte de los componentes extraídos por las técnicas estadísticas pero sus relaciones con ellos permite interpretar más ajustadamente un modelo de la realidad.

También, si la muestra es suficientemente grande, resulta posible dividirla

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

en varias submuestras para analizar la robustez de los resultados obtenidos y otras veces se puede integrar con otras muestras para explicar o discriminar los casos que *a priori* se puedan. No obstante, en todos los casos, el paso final consiste en la validación de la bondad de los resultados.

2. Método de la correlación

La siguiente tabla señala los resultados obtenidos sobre la muestra de empresas en redivuabilidad, siguiendo el método de correlación:

Tabla 18. Análisis de los valores propios de la matriz de correlación de los componentes principales en condiciones de redivuabilidad

	CP1	CP2	CP3	CP4	CP5	CP6	CP7	CP8	CP9	CP10	CP11	CP12
Valor	3,488	2,743	2,082	1,215	0,913	0,850	0,304	0,224	0,101	0,055	0,024	0,001
Frac.	0,291	0,229	0,174	0,101	0,076	0,071	0,025	0,019	0,008	0,005	0,002	0,000
Acum.	0,291	0,519	0,693	0,794	0,870	0,941	0,966	0,985	0,993	0,998	1,000	1,000

Fuente: S. Pérez, 2013. Elaboración propia utilizando Minitab

En la Tabla 18 (Condiciones de Redivuabilidad) se requiere acumular hasta el CP11 para explicar la variación total contenida en los componentes.

Tabla 19. Análisis de los valores propios de la matriz de correlación de los componentes principales en riesgo contable

	CP1	CP2	CP3	CP4	CP5	CP6	CP7	CP8	CP9	CP10	CP11	CP12
Valor	4,518	2,375	2,053	1,074	0,780	0,520	0,435	0,130	0,080	0,320	0,003	0,001
Frac.	0,376	0,198	0,171	0,089	0,065	0,043	0,036	0,011	0,007	0,003	0,000	0,000
Acum.	0,376	0,574	0,745	0,835	0,900	0,943	0,980	0,990	0,997	1,000	1,000	1,000

Fuente: S. Pérez, 2013. Elaboración propia utilizando Minitab

También se observa cómo en la Tabla 19 (Riesgo Contable), basta acumular solamente hasta el CP10 para explicar la variación total contenida en los componentes hasta llegar al nivel máximo del 100 %.

Tabla 20. Matriz de variabilidades máximas de cada índice financiero en condiciones de redituabilidad sobre los componentes principales según método de correlación

	LG	LC	LS	CTP	PCT	RAR	GDE	CDE	GIP	RSV	RSA	RSP
CP1	-0,488	-0,398	-0,282	-0,426	-0,239	-0,119	0,107	0,070	0,489	0,036	0,069	0,102
CP2	0,038	-0,060	0,057	0,270	0,080	-0,253	0,521	0,534	-0,064	-0,209	0,242	0,431
CP3	0,024	-0,113	0,207	-0,000	-0,094	0,534	-0,031	-0,002	-0,035	0,566	0,463	0,336
CP4	0,002	-0,042	-0,178	-0,074	0,377	0,358	0,380	0,366	0,034	0,348	-0,463	-0,276
CP5	-0,087	0,181	0,272	0,300	-0,770	0,092	0,182	0,163	0,136	0,077	-0,249	-0,218
CP6	0,101	-0,554	0,741	-0,186	0,123	0,040	0,008	0,021	0,042	-0,216	-0,135	-0,125
CP7	0,037	-0,603	-0,348	0,186	-0,254	-0,036	-0,114	0,111	-0,580	0,049	0,042	-0,216
CP8	0,797	-0,103	-0,254	-0,237	-0,258	0,142	0,004	0,040	0,244	-0,141	-0,134	0,216
CP9	-0,228	-0,053	0,022	0,040	-0,046	0,075	-0,160	-0,105	-0,230	-0,002	-0,624	0,676
CP10	-0,084	0,327	0,095	-0,675	-0,180	0,077	-0,065	0,379	-0,456	-0,143	0,075	-0,029
CP11	0,213	0,014	0,156	-0,159	-0,023	-0,682	-0,054	0,058	-0,036	0,646	0,011	0,031
CP12	0,025	0,004	-0,002	-0,206	-0,101	-0,024	0,702	-0,614	-0,276	0,013	-0,115	0,004
Abs.	2,124	2,452	2,614	2,759	2,545	2,432	2,328	2,463	2,622	2,446	2,622	2,660
Sg +	0,582	0,215	0,593	0,283	0,228	0,542	0,818	0,707	0,360	0,709	0,344	0,675

Fuente: S. Pérez, 2013. Elaboración propia utilizando Minitab

En este caso vemos que mientras la Tabla 20 muestra como sus mayores correlaciones positivas a las parejas:

GDE-CP2, RSP-CP9, LS-CP6, LG-CP8, RAR-CP3 y GIP-CP1

Tabla 21. Matriz de variabilidades máximas de cada índice financiero en riesgo contable sobre los componentes principales según método de correlación

	LG	LC	LS	CTP	PCT	RAR	GDE	CDE	GIP	RSV	RSA	RSP
CP1	0,363	0,367	0,211	0,222	-0,408	0,043	-0,415	-0,329	-0,308	-0,003	0,152	0,272
CP2	-0,267	-0,201	-0,190	-0,481	-0,256	-0,013	-0,206	-0,330	0,370	-0,006	0,463	0,231
CP3	-0,052	-0,044	0,010	-0,039	-0,032	0,688	-0,059	-0,075	0,008	-0,694	-0,121	-0,116
CP4	-0,181	-0,392	-0,583	0,195	-0,024	-0,035	-0,230	0,065	-0,453	-0,032	-0,201	0,361
CP5	0,183	0,144	-0,523	-0,009	-0,187	-0,117	-0,103	-0,384	0,130	0,066	-0,286	-0,601
CP6	0,383	0,124	-0,462	0,216	-0,048	0,107	0,263	0,350	0,077	-0,109	0,595	-0,008
CP7	0,353	0,360	-0,210	-0,575	0,128	0,027	0,024	0,182	0,074	-0,025	-0,377	0,413
CP8	-0,208	0,352	-0,168	0,323	0,541	0,004	0,182	-0,508	0,156	-0,064	0,046	0,292
CP9	-0,642	0,605	-0,121	-0,025	-0,302	-0,005	0,005	0,303	-0,132	-0,005	0,013	-0,079
CP10	0,000	-0,113	0,026	0,263	-0,571	-0,026	0,529	-0,085	0,322	-0,035	-0,320	0,311
CP11	-0,002	0,027	-0,008	0,355	0,059	-0,039	-0,580	0,334	0,623	-0,030	-0,153	0,087
CP12	0,029	0,011	0,063	-0,040	0,002	-0,703	0,004	0,013	-0,047	-0,703	0,036	-0,020
Abs.	2,663	2,740	2,575	2,743	2,558	1,807	2,600	2,958	2,700	1,772	2,763	2,791
Sg +	0,492	0,726	0,120	0,574	0,285	0,481	0,387	0,422	0,652	0,037	0,472	0,705

Fuente: S. Pérez, 2013. Elaboración propia utilizando Minitab

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

La Tabla 21 presenta como mayores correlaciones positivas:

LC-CP9, RSP-CP7, GIP-CP2, LG-CP1, RAR-CP3 y GDE-CP6

El criterio aquí aplicado, para la selección de las variables mejor proporcionadas como para asumir una representación explicativa de la variabilidad de los datos, ha sido el de incluir la mayor diversidad posible de los tipos de indicadores (liquidez, riesgo y redituabilidad), estos son: LG, RAR y RSP.

Validación

Comoquiera que las licencias temporales de software presentan limitaciones en su disponibilidad, se ha preferido ilustrar la validación de resultados utilizando una técnica manual, usualmente considerada parte del llamado análisis discriminante:

1. Para el método de la covarianza

Las escalas sumatorias de las puntuaciones que tienen los componentes principales (Terradez, 2002) se pueden calcular mediante la expresión:

$$CP_{ij} = a_{i1} \cdot Z_{1j} + \dots + a_{ik} \cdot Z_{kj} = \sum a_{is} \cdot Z_{sk} \quad (5)$$

En la que “a” son los coeficientes y los “Z” son los valores estandarizados que tienen las variables en cada uno de los sujetos de la muestra. Frecuentemente, la puntuación de las dos primeras componentes es suficiente como indicador sintético (varianza explicada a un nivel mínimo de 70-90 %), mientras que en otras se requiere de la acumulación de varios componentes (Grané, 2002).

El Cuadro 5 muestra la acumulación del porcentaje de varianza explicada dado por la Tabla 16 (por ejemplo, el primer término es dado según:

$$LG: 0,424+0,105-0,736-0,287-0,269-0,293+0,147-0,059 = -0,968)$$

Cuadro 5. Acumulación de la varianza explicada de 8 CP en condiciones de redituabilidad obtenidos por el método de covarianza

	LG	LC	LS	CTP	PCT	RAR	GDE	CDE	GIP	RSV	RSA	RSP
∑ CP8	-0,968	2,009	0,485	-0,712	0,874	-0,054	0,367	0,273	0,616	-0,908	-0,165	-0,264

Fuente: S. Pérez, 2013. Elaboración propia

Utilizando estos datos como coeficientes en la ecuación 5, la escala sumatoria de la puntuación de los componentes principales aplicables a cada una de las empresas de la muestra en condiciones de redituabilidad, por el método de covarianza estará dado según:

$$Z = (-0,968)LG + (2,009)LC + (0,485)LS + (-0,712)CTP + (0,874)PCT + (-0,054)RAR + (0,367)GDE + (0,273)CDE + (0,616)GIP + (-0,908)RSV + (-0,165)RSA + (-0,264)RSP$$

La aplicación de esta ecuación a las 63 empresas en redituabilidad de los datos originales nos proporciona un criterio de clasificación de tales empresas. Según nuestra conveniencia, aplicamos el artificio estadístico del *análisis discriminante* señalando los primeros 31 Zetas más altos como empresas “fuertes” en redituabilidad, las cuales requieren sustituir esta asignación “no numérica” por el número 2, mientras que a las restantes 32 Zetas señalables como empresas en redituabilidad “aceptables” les es asignado el número 1. Luego, se toma una muestra que incluye 25 empresas fuertes y 25 empresas aceptables para que mediante una operación de regresión en Excel otorgue continuidad a las variables LC, GDE y GIP anteriormente señaladas como capaces de asumir una representación explicativa de la variabilidad de los datos. Así, obtenemos, de la ecuación 5, la siguiente expresión:

$$Y = -0,5604 + (0,4142)LC + (0,5068)GDE + (1,0239)GIP$$

Finalmente se prueba esta expresión en las 13 empresas restantes (6 fuertes y 7 aceptables), es decir, para determinar si estas empresas se clasifican correcta-

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

mente como fuertes o aceptables (0 errores en empresas restantes de 16 totales en datos originales). Se concluye que el modelo es apto (75 %) para predecir si una empresa es fuerte o aceptable con base en los indicadores seleccionados del análisis de variables del ACP y del análisis discriminante. El Cuadro 6 recoge los cálculos obtenidos.

2. Para el método de correlación

El Cuadro 7 muestra la acumulación del porcentaje de varianza explicada dado por la Tabla 21 (por ejemplo, el primer término es dado según:

$$LG: 0,363-0,267-0,052-0,181+0,183+0,383+0,353-0,208-0,642+0 = -0,068)$$

Utilizando estos datos como coeficientes en la ecuación 5, la escala sumatoria de la puntuación de los componentes principales aplicables a cada una de las empresas de la muestra en riesgo contable, por el método de correlación estará dado según:

$$Z = (-0,068)LG + (1,202)LC + (-2,01)LS + (0,09)CTP + (-1,159)PCT + (0,673)RAR + (-0,01)GDE + (-0,811)CDE + (0,244)GIP + (-0,907)RSV + (-0,036)RSA + (1,076)RSP$$

Cuadro 6. Informe de validación Covredi

ID	LC	GDE	GIP	Nº	Zcovredi	Discrim	Ycovredi
115	19,140	0,3300	0,0352	1	34,103		7,5707
6516	6,910	0,0800	-0,541	2	11,809		1,7880
6516	6,460	0,1200	0,3803	3	6,6604		2,5655
6516	3,630	0,2200	0,9318	4	6,5628		2,0087
2699	3,270	0,2500	0,8576	5	5,5565		1,7988
118	1,080	5,1400	1,8313	6	5,4805		4,3669
6516	5,220	0,0600	0,8868	7	5,3681	2	2,5401
1571	2,100	0,4200	1,1753	8	4,8783	2	1,7256
6516	4,920	0,1600	0,4049	9	4,8268	2	1,9731
1600	2,330	0,1700	0,9935	10	4,5162	2	1,5081
2101	3,010	0,2200	0,8008	11	4,4060	2	1,6178
2102	1,830	0,5500	1,1505	12	4,1168	2	1,6544
1571	1,580	0,6500	1,3033	13	4,0383	2	1,7579
114	1,780	0,5600	1,0928	14	3,8920	2	1,5796
2694	0,960	1,0800	1,7889	15	3,7853	2	2,2163
5511	1,700	0,1900	1,0685	16	3,7663	2	1,3341

Samuel Leónidas Pérez Grau

1720	2,400	0,3100	0,8438	17	3,6248	2	1,4548
B	1,470	0,3300	1,1839	18	3,4714	2	1,4279
5219	1,230	3,2200	0,3573	19	3,3316	2	1,9468
2694	1,180	0,5400	1,3541	20	3,3312	2	1,5884
1593	1,510	0,3200	1,1370	21	3,2477	2	1,3914
9211	1,520	0,2800	1,1357	22	3,2269	2	1,3740
2710	1,890	0,2500	0,9476	23	3,2269	2	1,3194
2322	1,220	0,8900	1,2226	24	3,2188	2	1,6478
1571	1,460	0,3600	1,1364	25	3,1845	2	1,3904
8511	1,250	2,6900	0,6099	26	3,1483	2	1,9452
2694	2,180	0,3600	0,8178	27	3,1377	2	1,3624
4530	1,090	2,3500	0,8501	28	3,1221	2	1,9525
1511	1,040	1,4000	1,2282	29	3,1113	2	1,8374
5161	1,360	1,7900	0,7433	30	2,9603	2	1,6711
4521	1,330	1,8100	0,9179	31	2,9481	2	1,8476
2610	1,270	0,9300	1,0866	32	2,8820	1	1,5495
1593	3,750	0,2100	0,5603	33	2,8679	1	1,6730
2211	1,780	0,2500	0,9830	34	2,8525	1	1,3101
2694	1,890	0,1100	1,0055	35	2,8161	1	1,3077
2322	1,200	0,5000	1,1312	36	2,7702	1	1,3482
1541	1,350	0,3900	1,0554	37	2,7251	1	1,2770
2212	0,860	0,6900	1,3217	38	2,7022	1	1,4988
8511	1,790	0,6000	0,8612	39	2,6840	1	1,3668
2899	1,580	0,4400	0,9295	40	2,6741	1	1,2687
114	3,700	0,3500	0,1420	41	2,5960	1	1,2949
2211	1,180	0,5100	1,1325	42	2,5915	1	1,3463
2310	1,830	0,7100	0,6520	43	2,5097	1	1,2250
2691	1,010	1,1100	1,0135	44	2,4932	1	1,4582
2694	0,870	0,8100	1,5802	45	2,4872	1	1,8284
2521	2,000	0,2600	0,7781	46	2,4666	1	1,1965
6514	1,120	0,3900	1,2316	47	2,4492	1	1,3622
2694	1,270	0,2400	1,1301	48	2,4422	1	1,2444
1581	1,520	0,1300	1,0450	49	2,4298	1	1,2051
2102	1,360	0,2300	0,9929	50	2,3977	1	1,1361
8050	0,600	0,4300	1,3508	51	2,3067	1	1,2891
5219	1,020	0,4300	1,0559	52	2,2439	1	1,1612
5219	1,050	0,4400	1,0099	53	2,2307	1	1,1315
5219	0,930	0,4400	1,0854	54	2,1990	1	1,1591
1589	1,130	0,5400	1,0005	55	2,1822	1	1,2057
1720	1,780	0,5100	0,6377	56	2,1045	1	1,0882
4530	1,420	1,4100	0,4715	57	1,9635	1	1,2251
2521	2,090	0,2600	0,7566	58	1,9431	1	1,2117
2699	1,680	0,3900	0,7377	59	1,8767	1	1,0884
6212	1,790	0,8000	0,3862	60	1,8524	1	0,9819
5511	1,780	0,7600	0,4146	61	1,6652	1	0,9866
2694	0,770	0,2400	1,1323	62	1,4295	1	1,0395
2694	1,010	0,0500	0,9697	63	-1,487	1	0,8762

Fuente: S. Pérez, 2013. Elaboración propia

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Cuadro 7. Acumulación de la varianza explicada de 10 CP en riesgo contable obtenidos por el método de correlación

	LG	LC	LS	CTP	PCT	RAR	GDE	CDE	GIP	RSV	RSA	RSP
$\sum CP_{10}$	-0,068	1,202	-2,01	0,09	-1,159	0,673	-0,01	-0,811	0,244	-0,907	-0,036	1,076

Fuente: S. Pérez, 2013. Elaboración propia

La aplicación de esta ecuación a las 43 empresas colombianas en riesgo contable de los datos originales nos proporciona un criterio de clasificación de tales empresas. Según nuestra conveniencia, aplicamos el artificio estadístico del análisis discriminante señalando los primeros 22 Zetas más altos como empresas “recuperables” en redituabilidad, las cuales requieren sustituir esta asignación “no numérica” por el número 1, mientras que a los restantes 21 Zetas señalables como empresas en redituabilidad “débiles” les es asignado el número 2. Luego, se toma una muestra que incluye 15 empresas recuperables y 16 empresas débiles para que mediante una operación de regresión en Excel otorgue continuidad a las variables LG, RAR y RSP anteriormente señaladas como capaces de asumir una representación explicativa de la variabilidad de los datos. Así, de la ecuación 5, obtenemos la siguiente expresión:

$$Y = 0,6263 + (0,0016)LC + (0,4231)GDE + (0,4580)GIP$$

Finalmente se prueba esta expresión en las 12 empresas restantes (6 fuertes y 6 aceptables), es decir, para determinar si estas empresas se clasifican correctamente como fuertes o aceptables (2 errores en empresas restantes de 7 totales en datos originales). Se concluye que el modelo es apto (84 %) para predecir si una empresa es fuerte o aceptable con los indicadores seleccionados del análisis de variables del ACP y del análisis discriminante. El siguiente cuadro recoge los cálculos obtenidos:

Cuadro 8. Informe de validación Corriescon

ID	LC	GDE	GIP	Nº	Zcorriescon	Discrim	Ycorriescon
6516	13,160	0,1000	0,4530	1	12,3910		1,0945
6516	14,110	0,0800	0,2960	2	9,0110		1,0299
6516	6,7600	0,1500	0,3430	3	5,2320		0,9591
6516	5,2500	0,1500	0,3660	4	4,0210		0,9445
6516	4,4400	0,1300	0,8270	5	3,4200		1,1338
6516	8,5200	0,0900	0,3580	6	2,3260		0,9698
6516	3,4200	0,2700	0,3040	7	2,0990	1	0,9365
6516	3,2500	0,1600	0,6880	8	1,8660	1	1,0631
6516	3,0200	0,1700	0,7610	9	1,6740	1	1,0969
114	2,2500	0,0200	0,9550	10	0,8470	1	1,1095
6516	2,2500	0,3400	0,7300	11	0,6610	1	1,1418
7122	2,1700	0,0400	0,9350	12	0,1920	1	1,1075
2899	1,8100	1,0800	0,5930	13	-0,3000	1	1,3849
114	0,9800	0,0800	1,0840	14	-0,5430	1	1,1729
5031	1,5300	1,5700	-0,710	15	-1,0770	1	0,9908
5511	0,7400	0,1200	1,0170	16	-1,1000	1	1,1551
1571	1,2700	0,5300	1,2480	17	-1,1660	1	1,4432
2710	1,5500	0,3400	0,9570	18	-1,1860	1	1,2342
2710	1,0500	0,6900	1,2860	19	-1,2090	1	1,5247
5030	1,1500	1,1100	1,1860	20	-1,2130	1	1,6582
1720	2,1600	0,5900	0,8390	21	-1,4720	1	1,2960
1720	1,5700	0,5600	0,9430	22	-1,5200	1	1,3212
1720	1,0200	0,6400	0,9880	23	-1,5840	2	1,3665
2511	2,0600	0,6700	0,9330	24	-1,6250	2	1,3713
1720	1,2200	0,8900	1,3810	25	-1,7430	2	1,6556
1720	1,3800	0,3900	1,0890	26	-1,7770	2	1,3130
5513	0,0220	1,2300	2,2170	27	-1,7800	2	2,1625
1720	0,8600	1,1000	1,5740	28	-1,7940	2	1,8269
2424	1,2300	0,8900	1,0570	29	-1,8370	2	1,5074
1720	2,6700	1,2100	1,2800	30	-1,9060	2	1,7688
1522	1,3900	1,5000	1,9300	31	-1,9110	2	2,1680
116	0,5800	1,1500	1,9610	32	-2,0160	2	2,0206
1720	1,9600	0,9400	1,0760	33	-2,1880	2	1,5494
1720	0,0990	0,6400	1,6560	34	-2,3510	2	1,6572
2694	0,9500	0,6700	1,7000	35	-2,3890	2	1,7041
6426	0,5000	1,4200	2,0430	36	-2,3940	2	2,1711
3120	1,0200	1,4100	1,9310	37	-2,4570	2	2,1242
1741	1,5600	0,8300	0,9080	38	-2,6900		1,4192
2899	0,7700	2,6800	2,4210	39	-3,0330		2,8818
2212	1,1000	1,5400	1,9510	40	-3,0640		2,1897
2710	0,9500	2,2400	2,5530	41	-3,1120		2,7591
6516	2,5000	1,4000	-0,650	42	-4,5220		0,9624
6514	9,7400	0,1700	0,9220	43	-5,6710		1,2822

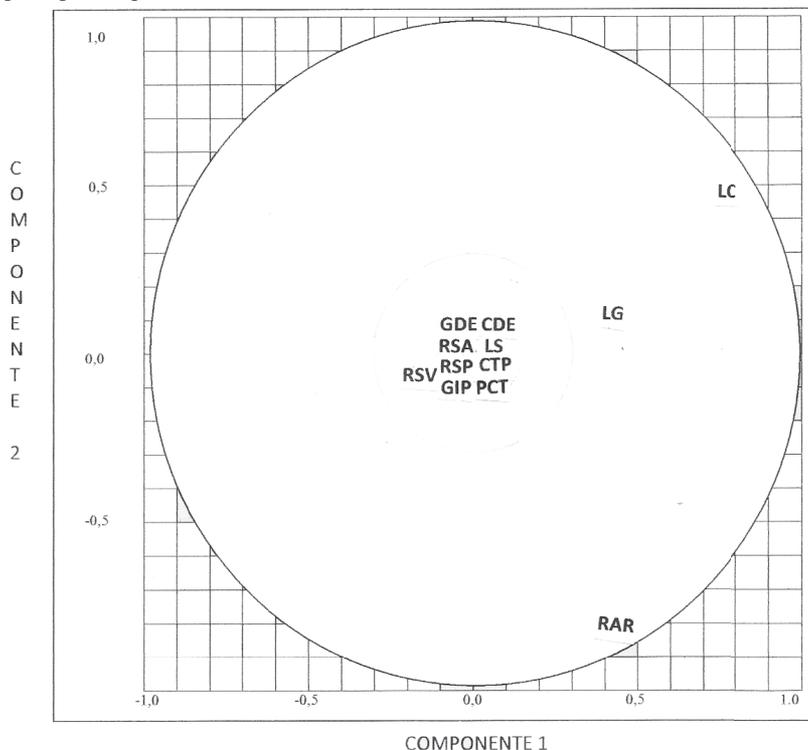
Fuente: S. Pérez, 2013. Elaboración propia

Discusión

Para caracterizar el arreglo de las cargas de los componentes retenidos en términos de las variables originales, nos valemos del diagrama de variables y del círculo de correlación, construidos con las matrices factoriales dadas por las Tablas 16 y 17 además de las Tablas 20 y 21.

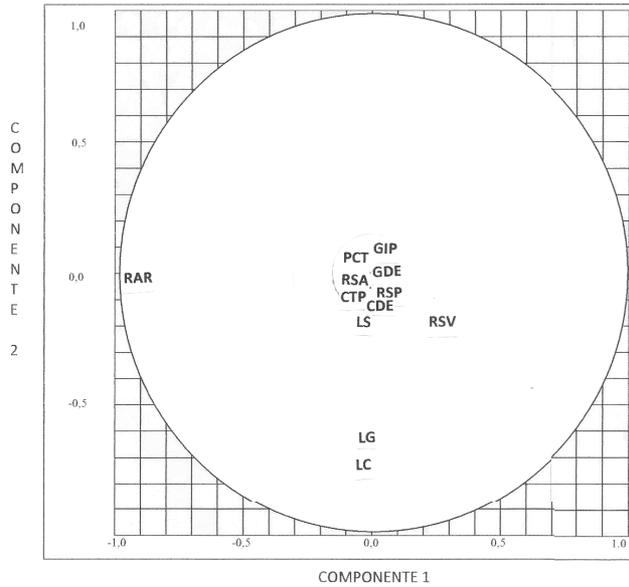
Usualmente, los resultados se grafican en dos dimensiones de CP1 y CP2 para observar la variabilidad de los datos, según sus representaciones ya dispersas o ya concentradas, pero aquellos puntos destacados por sus ubicaciones distintas (especialmente los negativos) son los que cabría estudiar más a fondo.

Figura 17. Diagrama de variables en condiciones de redituabilidad sobre los componentes principales según método de covarianza



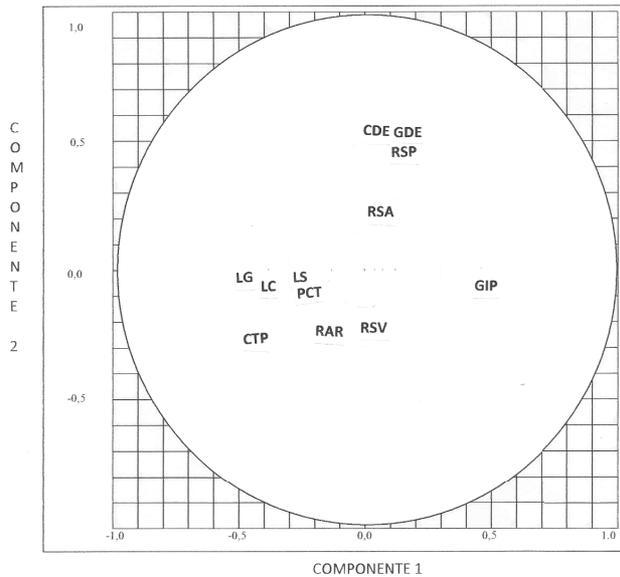
Fuente: S. Pérez, 2013. Elaboración propia

Figura 18. Diagrama de variables en condiciones de riesgo contable sobre los componentes principales según método de covarianza



Fuente: S. Pérez, 2013. Elaboración propia

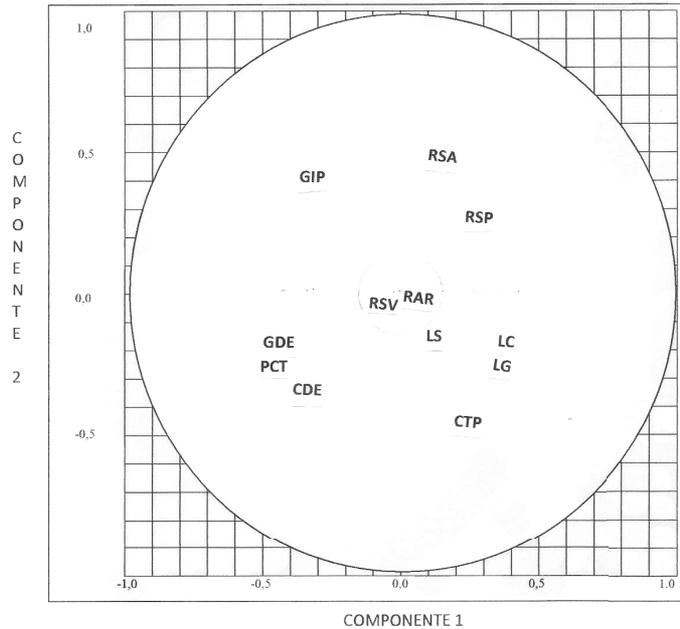
Figura 19. Círculo de correlación en condiciones de redeviabilidad



Fuente: S. Pérez, 2013. Elaboración propia

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Figura 20. Círculo de correlación en condiciones de riesgo contable



Fuente: S. Pérez, 2013. Elaboración propia

En estos gráficos en dos dimensiones CP1 y CP2, bajo el método de covarianza, puede observarse cierta concentración de las variables alrededor del origen de ambos componentes, aunque se destacan por sus valores distintos las variables que miden aspectos de Liquidez y el indicador de riesgo Rotación del activo realizable, con valores positivos bajo condiciones de redituabilidad, y negativos bajo condiciones de riesgo contable. Entonces, podemos decir, que las primeras muestran una fuerte correlación con el eje 1 mientras el segundo lo hace con el eje 2.

En cuanto a los gráficos bajo el método de correlación puede observarse cierta dispersión de las variables, entre las que se destacan por su separación de las otras variables, los indicadores de apalancamiento GDE, CDE y GIP. Bajo condiciones de redituabilidad mantienen correlación positiva respecto al pri-

mer componente, mientras que sucede todo lo contrario bajo condiciones de riesgo contable cuando GIP presenta gran correlación respecto del segundo componente. Por su lado, los indicadores de liquidez, muestran mayor correlación respecto al primer componente bajo todas condiciones.

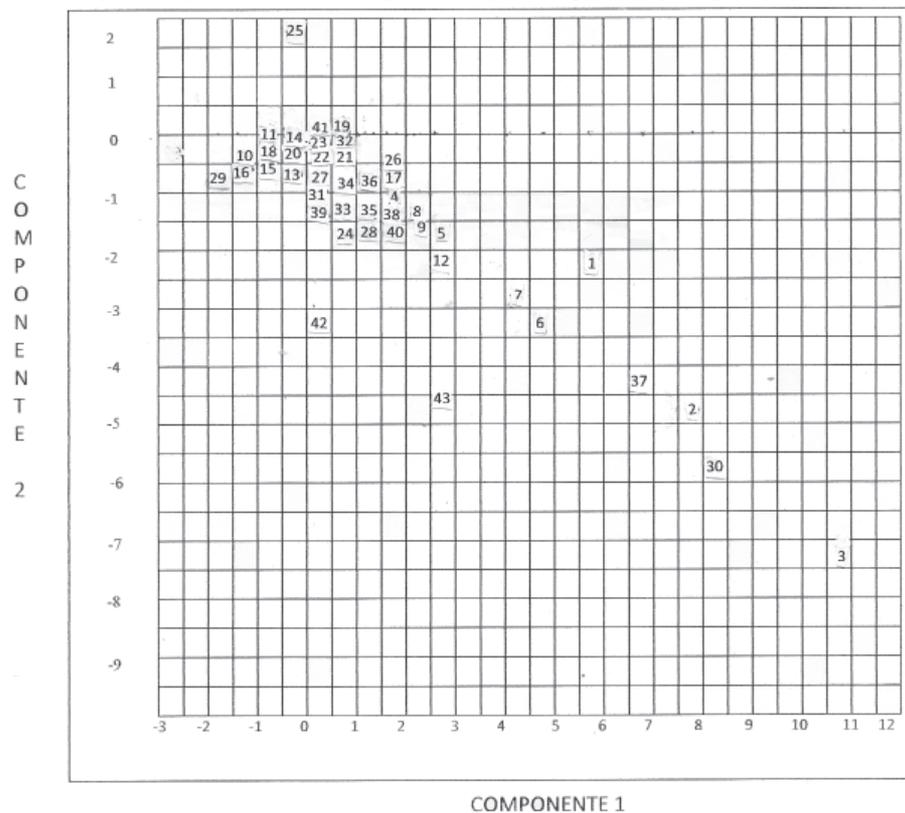
Después de examinar inicialmente los resultados de los dos primeros ACP, se pueden ensayar otras parejas de componentes principales en la más diversa gama de planos factoriales que se deseen construir, unas veces en escalas absolutas y otras veces en escalas relativas, para estudiar el grado de correlación entre variables.

En ambos tipos de gráficos que se han mencionado, consideramos al primer componente principal en el eje de las abscisas y al segundo componente como eje de las ordenadas. De este modo, en el diagrama de variables, los puntos quedan inscritos dentro de un círculo de radio unidad. Estos puntos elementales son simplemente coeficientes de ecuaciones lineales que transforman los datos originales en cuentas (puntajes) indicativos de la carga respectiva sobre los ejes correspondientes.

Después de agotado el estudio de la *matriz factorial* rotada (por ejemplo, la Tabla 16) si la misma fuese multiplicada por la matriz inicial de los datos (en este ejemplo, la Tabla 12) se obtendría una matriz de puntajes (Cuadro 9) que viene a representar una estimación de las contribuciones de los factores de carga de las variables a cada empresa, lo cual permitiría una clasificación de la muestra de empresas (según el CPTOTAL). Basados en el Cuadro 9, mostrado más adelante, podremos construir su correspondiente plano factorial, así como el de la figura siguiente:

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Figura 21. Plano factorial utilizando las dos primeras componentes, absorbentes de los 100 % de la variabilidad de los datos, a partir de la matriz de correlación de la Tabla 19, originarios de un sistema con 43 empresas bajo condiciones de riesgo contable y 10 componentes principales



Fuente: S. Pérez, 2013. Elaboración propia

Las empresas 3, 30, 2, 37, 43, 6, 1, 7, 42 y 12 obtienen los mayores valores de la primera componente principal, mientras que las empresas 29, 16 y 10 obtienen los más bajos. Por otro lado, las empresas 25, 41 y 19 obtienen los más altos valores de la segunda componente, mientras que las empresas 29, 16, 15 y 13 obtienen los menores valores.

Para interpretar la nube de puntos individuales en un plano factorial, conviene tener en cuenta los siguientes aspectos:

Cuadro 9. matriz de contribuciones de los pesos de las razones financieras para la clasificación de las empresas colombianas en condiciones de solvencia

CIUU	CP1	CP2	CP3	CP4	CP5	CP6	CP7	CP8	CPTOTAL
2694	-2,772	-5,022	11,234	7,171	2,265	0,401	-1,994	2,958	14,24
118	-0,13	5,054	0,099	3,619	1,624	0,516	-2,326	1,467	9,924
5219	-1,549	3,672	0,102	2,446	1,124	0,355	-1,325	1,3	6,126
8511	-1,616	2,971	0,118	1,918	0,96	0,518	-1,571	1,39	4,688
4530	-1,176	2,588	0,174	1,814	0,738	0,535	-1,635	1,425	4,463
1593	-6,307	-1,337	4,551	2,093	1,916	1,339	-3,806	4,791	3,241
4521	-1,495	1,784	0,556	1,43	0,777	0,387	-1,842	1,345	2,943
2694	-1,994	-1,499	3,551	2,071	1,225	0,175	-2,333	1,558	2,753
5161	-1,506	1,954	0,053	1,233	0,672	0,222	-1,64	1,279	2,266
4530	-2,196	1,873	0,434	0,885	0,611	0,499	-1,64	1,789	2,254
1511	-0,639	1,363	0,01	1,033	0,432	0,261	-1,734	1,044	1,769
6514	-0,979	-0,407	1,701	1,138	0,726	0,415	-1,918	1,009	1,685
2691	-0,693	1,143	0,189	1,022	0,299	0,036	-1,473	1,156	1,679
2694	-0,175	0,645	0,356	0,797	0,353	0,061	-1,721	1,046	1,363
2211	-2,134	-0,547	1,998	1,048	0,973	0,601	-2,315	1,653	1,277
5511	-2,81	0,765	0,952	0,839	0,688	0,372	-1,758	2,184	1,233
2694	-0,51	-0,221	1,107	0,739	0,404	0,124	-1,407	0,927	1,162
2694	-1,078	-0,316	1,072	0,774	0,606	0,148	-1,764	1,239	0,681
2610	-1,04	0,82	0,24	0,721	0,457	0,171	-1,784	1,095	0,68
2310	-2,459	0,546	0,811	0,782	0,749	0,359	-1,957	1,844	0,676
2212	-0,267	0,466	0,124	0,583	0,292	0,155	-1,61	0,727	0,47
8050	0,021	0,185	0,218	0,408	0,299	0,257	-1,46	0,483	0,412
6212	-2,631	1,132	0,347	0,44	0,566	0,253	-1,696	1,975	0,388
1589	-1,027	0,507	0,234	0,45	0,341	0,195	-1,581	1,22	0,34
8511	-2,278	0,512	0,717	0,464	0,746	0,564	-2,162	1,724	0,287
2694	0,146	0,61	-0,014	0,687	0,377	0,064	-2,025	0,426	0,27
2521	-2,905	-0,001	1,077	0,53	0,736	0,342	-2,147	2,593	0,224
2211	-0,87	0,316	0,336	0,493	0,419	0,15	-1,708	1,026	0,163
2322	-0,59	0,85	0,068	0,5	0,34	-0,013	-1,815	0,766	0,106
2102	-1,27	-0,114	0,753	0,486	0,549	0,196	-1,76	1,258	0,1
2699	-2,173	0,359	0,543	0,394	0,517	0,22	-1,793	1,988	0,056
5219	-0,472	0,412	0,015	0,36	0,23	-0,007	-1,393	0,886	0,032
1593	-1,057	-0,141	0,971	0,568	0,676	0,164	-2,054	0,778	-0,094
5219	-0,527	0,382	0,038	0,362	0,222	-0,13	-1,403	0,904	-0,152

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

1720	-2,189	0,603	0,301	0,384	0,507	0,032	-1,731	1,86	-0,234
5219	-0,526	0,43	0,003	0,353	0,178	-0,232	-1,363	0,906	-0,25
2322	-0,701	0,463	0,146	0,26	0,337	0,039	-1,715	0,827	-0,344
1541	-1,052	0,25	0,326	0,306	0,455	0,13	-1,789	1,015	-0,359
1581	-1,198	-0,156	0,724	0,325	0,534	-0,07	-1,812	1,232	-0,421
9211	-1,194	0,023	0,675	0,261	0,672	0,357	-2,103	0,878	-0,432
2899	-1,429	0,36	0,234	0,352	0,465	-0,03	-1,782	1,316	-0,514
2694	-0,262	0,233	0,201	0,408	0,382	-0,114	-1,823	0,422	-0,553
1571	-0,975	0,132	0,453	0,302	0,541	0,11	-1,956	0,817	-0,574
5511	-1,347	-0,21	0,875	0,328	0,834	0,432	-2,245	0,759	-0,575
2694	-2,302	0,11	0,831	0,473	0,742	0,029	-2,227	1,716	-0,628
2521	-2,34	0,153	0,538	0,254	0,62	0,151	-2,042	1,983	-0,684
1571	-0,754	0,4	0,122	0,354	0,533	-0,039	-2,133	0,563	-0,953
1571	-0,764	0,08	0,244	0,26	0,527	-0,031	-1,92	0,646	-0,958
114	-1,193	0,348	0,195	0,361	0,582	-0,075	-2,106	0,809	-1,079
2710	-1,591	0,038	0,443	0,271	0,601	-0,085	-2,032	1,276	-1,08
2102	-1,214	0,31	0,234	0,331	0,645	0,011	-2,224	0,761	-1,144
1600	-1,44	-0,437	0,946	0,623	0,791	-0,524	-2,311	0,871	-1,481
1571	-1,427	0,113	0,455	0,22	0,856	0,231	-2,576	0,595	-1,532
114	-5,397	0,486	1,023	0,153	1,082	0,117	-2,866	3,815	-1,587
1720	-2,233	0,193	0,426	0,203	0,697	-0,211	-2,307	1,607	-1,627
2101	-3,305	0,021	0,786	0,093	1,078	0,363	-2,98	2,071	-1,872
6516	-5,49	-0,857	2,176	1,374	1,277	-1,332	-3,438	4,281	-2,009
2699	-2,88	-0,112	0,851	0,263	1,106	-0,151	-3,094	1,5	-2,516
6516	-4,81	-0,654	1,04	0,745	0,962	-2,055	-3,619	4,299	-4,091
6516	-1,95	-0,123	0,06	0,211	0,783	-1,586	-2,847	0,927	-4,525
6516	-6,526	-0,244	0,604	0,284	1,209	-2,094	-4,218	4,883	-6,102
6516	-9,733	-0,17	1,104	3,481	-4,042	-1,076	-5,854	4,116	-12,173
115	-10,428	-0,453	-1,694	-0,662	3,601	-9,82	-11,541	1,155	-29,843

Fuente: S. Perez, 2013. Elaboración propia

- Los puntos individuales no quedan encerrados en un círculo de radio unitario.
- Un punto individual situado en el extremo de uno de los ejes, significa que ese punto individual está muy relacionado con el respectivo componente.

- Cuando existen puntos individuales cercanos al origen, significa que estos individuos tienen poca o ninguna relación con los dos componentes.
- Las proximidades entre puntos individuales se interpretan como similitud de comportamiento entre estos respecto de las variables. Por ejemplo, dos puntos individuales que están muy cercanos en el plano, significa que ambos individuos tienen valores próximos en cada una de las respectivas variables.
- Un punto individual extremadamente alejado de la nube puede significar una de las dos situaciones:
 - Existe un error en la introducción del dato o en la medición.
 - Se trata de un individuo excepcional, el cual conviene sacar del análisis principal y usarlo como individuo suplementario, o bien, en el caso de que sean varios, analizarlos por separado.
 - Ambos casos requieren la elaboración de un nuevo ACP.
- Cuando se presentan varias nubes de puntos muy diferenciadas, significa que puede haber varias subpoblaciones de individuos. Si el propósito del estudio es detectar grupos diferentes, el ACP ha logrado su objetivo. Pero si el objetivo es estudiar la interrelación entre las variables, la aparición de varias subpoblaciones de individuos interfiere en este análisis, entonces conviene hacer un ACP en cada una de estas subpoblaciones (González, *et al.*, 1992).

Conclusiones

Alguien podría pensar que teóricamente el ACP pareciera una aplicación dispendiosa o una elaboración complicada para el discernimiento por parte de los contadores públicos, pero ello no es así, pues de la mayor labor se ocupan los ordenadores y, es un hecho, el desempeño del nuevo contador estará cada vez más involucrado entre herramientas informatizadas.

También es bueno resaltar la importante conclusión de que una acertada selección de indicadores de entre los componentes principales resultantes no podrá surgir *a priori*, sino que es su garantía como la del aprendizaje significativo (Pérez, 2007), el cual surge tras la observación frecuente del desempeño de redituabilidad y riesgo de los grupos de empresas y la configuración de tales variables (componentes). Es el estudio frecuente tanto del signo como de la magnitud de los resultados lo que permite desarrollar un juicio experto sobre las correlaciones entre variables.

El mayor reproche que se le pudiera hacer al ACP es su falta de reconocimiento a la no linealidad de los datos pues ignora dependencias de orden mayor que puedan existir entre las variables. Sin embargo, este problema queda desestimado seleccionando únicamente resultados óptimos sobre direcciones ortogonales.

Otra aceptación clave es que cada nueva matriz de mediciones, aun de las

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

mismas variables sobre los mismos individuos, requiere un nuevo ACP. No resulta recomendable, por tanto, dejar sentada conclusión alguna acerca de cuáles son las variables capaces de evidenciar la reproducción de un estado de redituabilidad o de riesgo contable, sino que ellas deberán ser identificadas en cada ocasión.

La primera recomendación para la eficaz utilización de esta técnica estadística por parte de los contadores públicos es la de entender por qué habría de ser importante la reducción del tamaño de cualquier problema estadístico, ya sea que esté relacionado con la diversidad de índices financieros, la clasificación de los resultados por áreas de operaciones o del servicio, la selección de clientes, la evaluación del desempeño por transacciones o productos, etc.

Además, es muy importante mencionar lo que tiene que ver con la adopción del software más apropiado para la ejecución del ACP. En este caso particular la utilización del Minitab tiene la ventaja de dejar toda la complejidad del cálculo estadístico a sus rutinas automatizadas, pero en general e independientemente al software utilizado, la técnica del ACP solo podría ser explotada por aquellos contadores públicos con un conocimiento básico de estadística descriptiva, una conceptualización de la correlación y regresión lineal y múltiple y una base mínima del álgebra de matrices, tal como es el perfil del nuevo contador al servicio del control de gestión y la revelación de los sistemas de valoración.

Pero lo más importante de este trabajo es que pone al servicio del profesional de la contaduría una herramienta más eficiente y más versátil para seleccionar índices financieros más objetivos.

Simplemente por estos motivos, este trabajo representa un avance en la efica-

cia de la intervención del profesional de la contaduría en procura de interpretar resultados contables financieros.

Vale la pena resaltar que los resultados obtenidos son propios de esta investigación, si bien en diversos procedimientos han servido de guía las descripciones temáticas propuestas por los autores referenciados al final del trabajo. El autor no ha podido conocer otro trabajo nacional sobre el tema por lo cual da fe de su autenticidad y veracidad. Comoquiera que las licencias temporales de software presentan limitaciones, se ha preferido ilustrar la aplicación con graficaciones de otros autores, igualmente que para finalizar, se ha hecho la siguiente validación de resultados utilizando una técnica manual.

Anexos

Anexo 1. Total Anual Móvil de Ventas

Año	Ventas anuales	Total anual móvil adicionado	Menos ventas año anterior	Total Anual móvil actualizado	Ventas acumuladas del lapso	Promedio anual móvil
0				5.893.028		491.086
1	791.048	6.684.076	237.272	6.446.804	791.048	537.234
2	837.196	7.521.272	283.420	7.237.852	1.628.244	603.154
3	902.314	8.140.166	329.564	7.810.602	2.530.558	650.884
4	941.685	8.752.287	375.716	8.376.571	3.472.243	698.048
5	1.030.192	9.406.763	421.864	8.984.899	4.502.435	748.742
6	1.074.686	10.059.585	468.012	9.591.573	5.577.121	799.298
7	1.115.555	10.707.128	514.160	10.192.968	6.692.676	849.414
8	1.205.111	11.398.079	560.308	10.837.771	7.897.787	903.148
9	1.358.686	12.196.457	606.456	11.590.001	9.256.473	965.833
10	1.420.090	13.010.091	652.604	12.357.487	10.676.563	1.029.791
11	1.460.473	13.817.960	698.752	13.119.208	12.137.036	1.093.267
12	1.476.525	14.595.733	744.900	13.850.833	13.613.561	1.154.236
13	1.659.916	15.510.749	791.048	14.719.701	15.273.477	1.226.642

Anexo 2. Total Anual Móvil de Cartera

Año	Saldos anuales de cartera	Historial móvil adicionado	Menos saldo cartera año anterior	Historial anual móvil actualizado	Saldos acumulados del lapso	Cartera promedio anual móvil
0				751.050		62.588
1	122.943	873.993	35.397	838.596	122.943	69.883
2	136.742	975.338	41.917	933.421	259.685	77.785
3	154.460	1.087.881	48.317	1.039.564	414.145	86.630
4	168.622	1.208.186	54.601	1.153.585	582.767	96.132
5	192.590	1.346.175	60.764	1.285.411	775.357	107.118
6	209.379	1.494.790	66.809	1.488.101	984.736	124.008
7	226.134	1.714.235	72.736	1.641.499	1.210.870	136.792
8	253.787	1.895.286	78.543	1.816.743	1.464.657	151.395
9	296.838	2.113.581	84.232	2.029.349	1.761.495	169.112
10	321.446	2.350.795	89.802	2.260.993	2.082.941	188.416
11	342.098	2.603.091	95.253	2.507.838	2.425.039	208.987
12	357.496	2.865.334	100.586	2.764.748	2.782.535	230.396
13	414.982	3.179.730	105.800	3.073.930	3.197.517	256.161

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Anexo 3. Conformación de las variables V² y B

V	(V-V ₀)	EJE X: (V-V ₀) ²	CxC	%(CxC)	%CxC(Vi)=B	EJE Y: (B-B ₀)
0,791048	0	0		0,155418	122,9431	0
0,837196	0,046148	0,00212964	0,136742	0,163333	136,7417	0,0137986
0,902314	0,111266	0,01238012	0,17896	0,171182	154,4599	0,0315168
0,941685	0,150637	0,02269151	0,109863	0,179064	168,6219	0,0456788
1,030192	0,239144	0,05718985	0,22836	0,186946	192,5903	0,0696472
1,074686	0,283638	0,08045052	0,137918	0,194828	209,3789	0,0864358
1,115555	0,324507	0,10530479	0,303059	0,20271	226,1342	0,1031911
1,205111	0,414063	0,17144817	0,110468	0,210592	253,7867	0,1308436
1,358686	0,567638	0,3222129	0,25362	0,218474	296,8376	0,1738945
1,42009	0,629042	0,39569384	0,16568	0,226356	321,4459	0,1985028
1,460473	0,669425	0,44812983	0,29	0,234238	342,0983	0,2191552
1,476525	0,685477	0,46987872	0,18949	0,24212	357,4962	0,2345531
1,659916	0,868868	0,7549316	0,415	0,250002	414,9823	0,2920392

Anexo 4. Conformación de las variables P² y A

P	(P-P ₀)	EJE X (P-P ₀) ²	A	(A-A ₀)	EJE Y (A-A ₀)
286.045	0	0	8.359	0	0
297.808	11.763	0,000138368	7.716	-643	0,000643
331.383	45338	0,002055534	7.073	-1286	0,001286
365.920	79875	0,006380016	6.430	-1929	0,001929
368.274	82229	0,006761608	5.787	-2572	0,002572
366.638	80593	0,006495232	5.144	-3215	0,003215
367.685	81640	0,00666509	4.501	-3858	0,003858
366.159	80114	0,006418253	3.858	-4501	0,004501
362.964	76919	0,005916533	3.215	-5144	0,005144
359.524	73479	0,005399163	2.572	-5787	0,005787
356.580	70535	0,004975186	1.929	-6430	0,00643
356.620	70545	0,004976597	1.286	-7073	0,007073
352.676	66631	0,00443969	628	-7751	0,007751

Anexo 5. Condiciones alrededor del punto de operación lineal de dos tanques interconectados sin interacción

$E_i X_i (V=0)^2$	b_i	v_i	V_i	C_{ii}	R_{1i}	P_e	C_{i2}	R_{1i2}	R_{2i}
0	0,0266874	0,12013538	0	-1,98710779	-4,36419025	0	4,434625733	9,739557409	4,37996894
0,002129638	0,02793648	0,121134016	0,046148	-1,91784397	-4,21206943	11,763	11766,9181	25843,12213	11621,8908
0,012380123	0,03390799	0,125908231	0,111266	-1,74221529	-3,82634452	45,338	45337,48192	99572,55347	44778,6972
0,022691506	0,03984712	0,130656562	0,150637	-1,59293278	-3,49848243	79,875	79883,10894	175443,4697	78898,5491
0,057189853	0,05922271	0,146147319	0,239144	-1,14585504	-2,51658687	82,229	82239,1099	180617,8425	81225,5124
0,080450515	0,07185682	0,156248275	0,283638	-0,86755017	-1,90535914	80,593	80601,69191	177021,6593	79608,2756
0,105304793	0,0849738	0,166735283	0,324507	-0,5839342	-1,28246689	81,640	81649,58479	179323,0965	80643,2532
0,171448168	0,11795509	0,193103792	0,414063	0,11598422	0,25473063	80,114	80122,30038	175968,7945	79134,7925
0,322212899	0,18266582	0,244839935	0,567638	1,46711644	3,222158	76,919	76924,94895	168946,6038	75976,8485
0,395693838	0,20893169	0,265839466	0,629042	2,01460499	4,42458104	73,479	73482,88817	161386,9695	72577,2111
0,448129831	0,22556199	0,279135376	0,669425	2,36275373	5,18920355	70,535	70537,4749	154918,0985	69668,1001
0,469878718	0,2319434	0,284237304	0,685477	2,4969021	5,48382723	70,545	70547,47919	154940,0705	69677,9811
0,754931601	0,28759361	0,328729576	0,868868	3,7101735	8,14847746	66,631	66632,04459	146340,7879	65810,8042

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Anexo 6. Espacio de estados descrito por un subsistema hidráulico

	X1	X2	u	X'
1	0,229	-0,229	-0,5033	X'1 = -0,08
	0,10267	-0,3352	0,2255	X'2 = 0,00435
2	0,237	-0,237	-0,521	-0,083
	0,0000387	-0,000125	0,000085	0,00000185
3	0,261	-0,261	-0,574	-0,091
	0,00001	-0,0000324	0,0000221	0,000000431
4	0,286	-0,286	-0,628	-0,1
	0,0000057	-0,0000184	0,0000125	0,000000247
5	0,397	-0,397	-0,873	-0,139
	0,00000554	-0,0000178	0,0000122	0,000000243
6	0,525	-0,525	-1,152	-0,183
	0,00000565	-0,0000182	0,0000124	0,000000681
7	0,78	-0,78	-1,712	-0,272
	0,00000558	-0,000018	0,0000122	0,000000242
8	-3,922	3,922	8,621	1,37
	0,00000568	-0,0000183	0,0000125	0,000000248
9	-0,31	0,31	0,682	0,108
	0,00000592	-0,0000191	0,000013	0,000000257
10	-226	0,226	0,496	0,079
	0,0000062	-0,00002	0,0000136	0,000000269
11	-0,193	0,193	0,423	0,067
	0,00000646	-0,0000208	0,0000142	0,000000257
12	-0,182	0,182	0,4	0,064
	0,00000645	-0,0000216	0,0000142	0,000000249

Anexo 7. Variables del subsistema mecánico de costos y gastos

Año	(E) Efectivo Disponible	Utilidades del Ejercicio	Reservas Declaradas	(y) Pago de Dividendos	dy/dt	d ² y/dt ²	(yp) Solución General	(UAI) UT. antes de Impuestos
0								
1	799.892	91.065	5409	57.490	4.306		92.921	92.908
2	910.182	96.333	10193	61.796	1.960	-2.346	107.482	159.763
3	1.100.135	102.354	15302	63.753	964	-996	132.314	169.006
4	1.176.396	105.364	20411	64.720	329	-635	142.196	179.569
5	1.437.920	106.096	25520	65.049	2.594	2.265	175.701	184.849
6	1.242.313	106.117	30629	67.643	2.157	-437	150.697	186.133
7	1.649.125	106.605	35738	69.800	753	-1.404	202.327	186.170
8	1.559.166	107.113	40847	70.553	13	-740	191.033	187.027
9	1.799.131	107.622	45956	70.566	3.791	3.778	221.004	187.918
10	1.786.734	114.397	51065	74.357	4.735	944	247.100	188.810
11	1.982.848	115.148	56174	79.092	1.487	-3.248	243.613	200.695
12	1.758.621	115.900	61283	80.579			219.826	202.013

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Anexo 8. Serie de doce periodos anuales de los Estados Financieros de la empresa (primera parte)

ESTADO DE INGRESOS	1	2	3	4	5	6
Ventas	837.196	902.314	941.685	1.030.192	1.074.686	1.115.555
Inv. Inicial	190.143	235.486	223.249	255.502	268.245	278.124
Compras	558.195	540.505	609.113	643.820	668.213	694.267
Inv. Final	235.486	223.249	255.502	268.245	278.124	289.022
CMV	512.852	552.742	576.860	631.077	658.334	683.369
Deprec.	48.360	48.360	48.360	48.360	48.360	48.360
Otros gastos	116.221	132.206	136.896	165.906	181.859	197.656
Total costos y gastos	677.433	733.308	762.116	845.343	888.553	929.385
UAI	159.763	169.006	179.569	184.849	186.133	186.170
Impuestos	52.722	55.772	59.258	61.000	61.424	61.436
Reservas	15.976	16.901	17.957	18.485	18.613	18.617
Ut. Netas	91.065	96.333	102.354	105.364	106.096	106.117
BALANCE GENERAL						
Caja	19.986	59.253	234.601	242.692	261.799	221.323
Clientes	136.742	178.960	109.863	228.360	137.918	303.059
Inversiones	339.686	339.686	339.686	339.686	339.686	339.686
Inventarios	235.486	223.249	255.502	268.245	278.124	289.022
Terrenos	258.700	258.700	258.700	258.700	258.700	258.700
Edificios	523.672	502.854	482.036	461.218	440.400	419.582
Maquinaria y Equipo	470.360	442.818	415.276	387.734	360.192	332.650
Total Activos	1.984.632	2.005.520	2.095.664	2.186.635	2.076.819	2.164.022

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

Anexo 9. Serie de doce periodos de los Estados Financieros de la empresa (segunda parte)

ESTADO DE INGRESOS	7	8	9	10	11	12
Ventas	1.205.111	1.358.686	1.420.090	1.460.473	1.476.525	1.659.916
Inv Inicial	289.022	323.655	367.140	354.831	387.670	362.993
Compras	772.863	875.842	857.613	927.499	879.816	1.134.747
Inv Final	323.655	367.140	354.831	387.670	362.993	480.905
CMV	738.230	832.357	869.922	894.660	904.493	1.016.835
Deprec.	48.360	48.360	48.360	48.360	48.360	48.360
Otros gastos	231.494	290.051	312.998	316.758	321.659	391.388
Total costos y gastos	1.018.084	1.170.768	1.231.280	1.259.778	1.274.512	1.456.583
UAI	187.027	187.918	188.810	200.695	202.013	203.333
Impuestos	61.719	62.013	62.307	66.229	66.664	67.100
Reservas	18.703	18.792	18.881	20.069	20.201	20.333
Utilidades Netas	106.605	107.113	107.622	114.397	115.148	115.900
Caja	313.532	261.001	395.941	405.813	324.215	85.243
Cuentas por cobrar	110.468	253.620	165.680	290.000	189.490	415.000
Inversiones	339.686	339.686	339.686	315.146	315.146	315.146
Inventario	323.655	367.140	354.831	387.670	362.993	480.905
Terrenos	258.700	258.700	258.700	258.700	258.700	258.700
Edificios	398.764	377.946	357.128	336.310	315.492	294.674
Maquinaria y Equipo	305.108	277.566	250.024	222.482	194.940	167.398
Total Activos	2.049.913	2.135.659	2.121.990	2.216.121	1.960.976	2.017.066
Oblig. C/P	642.979	665.324	613.433	635.778	404.283	404.283
CxP L/P	211.496	219.251	201.242	208.997	128.655	128.655
Deudas Acc.	162.964	159.524	156.580	156.620	152.676	147.997
Para impuestos	61.719	62.013	62.307	66.229	66.664	67.100
Cap. Suscrit.	446.976	446.976	446.976	446.976	446.976	446.976
Reserv. Obli.	125.252	144.044	162.925	182.994	203.195	223.528
Reserv. Ocas.	198.527	238.527	278.527	318.527	358.527	398.527
Ut. Acum.	200.000	200.000	200.000	200.000	200.000	200.000
Ut. Ejerc.						
Total Pasivo y Patrimonio	2.049.913	2.135.659	2.121.990	2.216.121	1.960.976	2.017.066
Saldo Inicial	313.532	261.001	395.941	405.813	324.215	
Préstamos	30.100	30.100	30.100			
Cobros	1.215.534	1.508.030	1.336.153	1.577.035	1.434.406	
Venta activ.			24.540			
Otros						

Samuel Leónidas Pérez Grau

Disponible	1.559.166	1.799.131	1.786.734	1.982.848	1.758.621	
Compras	875.842	857.613	927.499	879.816	1.134.747	
Otros	290.051	312.998	316.758	321.659	391.388	
Impuestos	61.719	62.013	62.307	66.229	66.664	
Pagos Acreedores		100.000		311.837		
Egresos	1.227.612	1.332.624	1.306.564	1.579.541	1.592.799	
Excedente	331.554	466.507	480.170	403.307	165.822	
Dividendos	70.553	70.566	74.357	79.092	80.579	
Saldo Final	261.001	395.941	405.813	324.215	85.243	
Div. x pag. Inicial	162.964	159.524	156.580	156.620	152.676	
Utilidades	107.113	107.622	114.397	115.148	115.900	
Reserv. Ocas.	40.000	40.000	40.000	40.000	40.000	
Pago divid.	70.553	70.566	74.357	79.092	80.579	
Div. x pag. Final	159.524	156.580	156.620	152.676	147.997	

Referencias

- Barbosa Landim, P. (2000). *Análise estatística de dados geológicos multivariados*. Rio Claro: UNESP, Departamento de geología aplicada. Disponible en Internet: <http://www.rc.unesp.br/igce/aplicada/textodi.html>.
- Bronson, R. (1994). *Matrix methods: An introduction*. 2ª Ed. San Diego: Academic Press.
- Calafell, A. (1981). Teoría lineal de la contabilidad. *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, X(35): 283-298.
- Castro, M. (2002). *Desarrollo Urbano Sostenible 4*. Madrid: INE. Disponible en Internet: <http://www.euned.net/tesis/JmC/cap04/pdf>
- Cuéllar, G. (1987). *Aplicación de la teoría de grafos en la contabilidad*. Recuperado el 9 de octubre de 2012, de <http://www.geocities.ws/memodrx/Aplicaci%F3n%20de%20la%20Teor%EDa%20de%20Grafos%20en%20la%20Contabilidad.pdf>
- Churruca, E. (1981). Los modelos matricial y de input-output y su aplicación al cálculo de costes. *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, X(35): 299-358.

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

- De la Cruz, J.M. (2005). *Control digital*. México: ISA-UCM.
- Dos Santos, C. (2008/2009). *Guia pratico para elaboração do demonstrativo dos fluxos de caixa* (2ª reimpressão). Curitiba: Juruá.
- De Souza, L. (2002). *Contabilidade ao alcance de todos*. Curitiba: Juruá.
- García, M. (1975). El paradigma de la partida doble en la ciencia contable. *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, IV(12 y 13): 341-364.
- González Martín, P., Díaz De Pascual, A., Torres Lezama, E. & Garnica Olmos, E. (1992). Una aplicación del ACP en el área educativa. *Revista Economía*, 9: 18. Mérida.
- Gonçalves Da Silva, B. (2009). *Contabilidade ambiental*. Curitiba: Juruá.
- Grané, A. (2002). *Análisis de Componentes Principales*. Madrid: Universidad Carlos III, Departamento de Estadística.
- Hillier, F. & Hillier, M. (2010). *Métodos cuantitativos para administración*. 3ª Ed. México: McGraw-Hill.
- Jensen, M., Meckling, W. (1976). *Theory of the firm: managerial behavior and ownership structure*. University of Rochester Press.
- Jiménez, Q. (2003). *Control I*. Universidad Autónoma del Estado de Morelos.
- Leontieff, W. (1951). *Studies in the Structure of the American Economy: Theoretical and empirical explorations in input-output analysis*. Harvard University Press.

- Lopes De Sá, A. (2008). *Consultoria e analise contábil*. Curitiba: Juruá.
- Lopes De Sá, A. (2008/2009). *Fundamentos da contabilidades geral* (1ª reimpressão). Curitiba: Juruá.
- Lopes De Sá, A. (2009). *Tecnologia contábil contemporânea*. Curitiba: Juruá.
- Lopes De Sá, A. (2010). *Teoria da contabilidade*. Sao Paulo: Atlas.
- Mattesich, R. (1972). *Accounting and analytical methods*. Houston: Scholar Book Co.
- Mattesich, R. (2004). The rise and significance of modern analytical methods in accounting. *Energeia*, 2(1-2): 133-144.
- Mattesich, R. (2005). A concise history of analytical accounting. *De Computis*, (2): 123-152.
- Mock, T. (1973). Internal Control Evaluation. Wildman Award of American Accounting Association.
- Morozoni, J., Olinquevitch, J. & Hein, N. (2005). Seleccin de Indices na Analise de Balancos. *Rev. Contabilidade Financiera*, USP. Sao Paulo.
- Nepomuceno, V. (2008). *Teoria da contabilidades: Uma abordagem histórico cultural*. Curitiba: Juruá.
- Ogata, K. (1993). *Ingeniería de control moderno*. Segunda edición, Capítulo 2. México: Prentice Hall Hispanoamericana S.A.

CONTABILIDAD ANALÍTICA
Métodos cuantitativos para la ciencia contable

- Pérez, S. (2010). El Neopatrimonialismo contable. *Rev. Económicas CUC*, 30. Barranquilla.
- Pérez Grau, S. (2010). Modelo científico del sistema de funciones patrimoniales. En: *Económicas CUC*, 31(31): 10. ISSN: 0120-3932.
- Pérez, S. (2012). *Contabilidad de los fenómenos patrimoniales*. Barranquilla: Ediciones Bolivarianas.
- Pérez Grau, S. (2012). Modelo de contabilidad agregativa en espacios vectoriales. En: *Económicas CUC*, 33(33): 239. ISSN: 0120-3932.
- Render, F., Stair, R. & Hanna, M. (2010). *Métodos cuantitativos para los negocios*. 9ª Ed. México: Pearson-Prentice Hall.
- Rosillo, J. (2003). *Fundamentos de finanzas para la toma de decisiones*. Bogotá: UNAD.
- Shank, J. (1972). *Matrix methods in accounting*. Boston: Addison Wesley.
- Shlens, J. (2009). *A Tutorial on Principal Components Analysis*. NY: Center for Neuronal Science, NYU.
- Slaymaker, A. (1982). *A collection of readings sourced from scholarly publications*. American Accounting Association. NY: Garland Publishing Co.
- Thierauf, R. (1995). *Toma de decisiones por medio de I.O.* México: Limusa.
- Terradez, M. (2002). *Análisis de componentes principales*. Cataluña: Universidad de Oberta.

- Villardón, J. (2002). *Análisis de componentes principales*. Cataluña: UOC, Departamento de Estadística.
- Villarroel, L., Álvarez, J. & Maldonado, D. (2003). Aplicación del ACP en el desarrollo de productos. Cochabamba: Universidad Mayor Simón Bolívar. *Acta Nova*, 3(3): 9.
- Warren, C., Reeve, J. & Duchac, J. (2011). *Contabilidad Financiera*. 11a. Ed. México: Cengage Learning Inc.
- Zeff, S. (1982). The accounting postulates and principles, controversy of 1960. NY: Garland Publishing Co.

