Capítulo 2

Considerando preferencias de los clientes en problemas de localización de instalaciones

Martha-Selene Casas-Ramírez[1]
José-Fernando Camacho-Vallejo[2]

1 Facultad de ciencias físico-matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León, México. martha.casasrm@uanl.edu.mx
2 Facultad de ciencias físico-matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León, México. jose.camachovl@uanl.edu.mx

RESUMEN

En este capítulo nos enfocamos en los problemas de localización de instalaciones considerando las preferencias que los clientes han establecido sobre estas. Debido a esta situación, es natural modelarlos con programación binivel donde el nivel superior corresponde al localizador, que desea minimizar los costos de localización y distribución; y el nivel inferior está asociado a los clientes, que desean optimizar sus preferencias. Para resolver los problemas, se desarrollaron las reformulaciones clásicas de programación binivel para reducir los modelos a uno solo. Se llevó a cabo experimentación computacional que demostró que el tiempo requerido es considerable y que algunas instancias no son posibles de resolver. Por lo tanto, la justificación de algoritmos heurísticos para la resolución de estos modelos es razonable.

Palabras clave: localización de instalaciones, preferencias de los clientes, programación binivel.

ABSTRACT

In this chapter, we focus in facility location problems that consider customers preferences toward the facilities. Due to this assumption, a natural manner to model them is by using a bilevel programming scheme. Within the bilevel scheme, the upper level is associated with the locator, which aims to minimize the locating and distributing costs; on the other hand, the lower level is associated with the customers, who desire to optimize the allocation based on their own preferences. To solve the bilevel problems herein presented, the classical reformulations for reducing the bilevel problem into a single level one are developed. Computational experimentation is conducted showing that the required time is significant and in some instances, the instances it cannot be solved. Therefore, the use of heuristic algorithms for solving these problems is justified.

Keywords: facility location, customer preferences, bilevel programming.

1. INTRODUCCIÓN

En un problema de localización de instalaciones existe un conjunto de clientes distribuidos en un espacio predefinido que desea que una o más instalaciones satisfagan la demanda de cierto servicio o producto. El problema consiste en ubicar las instalaciones (almacenes, centros de distribución, tiendas comerciales, contenedores de basura, postes de luz, entre otras) de tal manera que se minimicen los costos de instalación y los de distribución. La distribución se asocia a un producto o servicio que dicha instalación va a brindar. Es decir, el costo de atender a un cliente dada la ubicación de la instalación.

Usualmente en los problemas de localización de instalaciones la asignación de los clientes se realiza basándose en la regla de la distancia más corta (menor costo). Es claro que esta regla favorece a la reducción de costos del localizador. Sin embargo, es interesante tener otra regla desde el punto de vista de los clientes.

Otra regla de asignación puede ser basada en la preferencia que tienen dichos clientes sobre las instalaciones. Desde este enfoque, el localizador no puede decidir sobre la asignación de los clientes. Sino que estos mismos deben decidir la forma de elegir a las instalaciones. Esto nos lleva a aplicar enfoques de programación binivel para modelar dichas situaciones.

En el caso de que se conozca el número total de instalaciones por localizar, el problema es llamado p-mediana (Hakimi, 1964). Con base en esta suposición clave, se omiten los costos fijos. Resolver estos problemas no es una tarea fácil; Kariv & Hakimi (1979) demostraron que son NP-hard. Por lo tanto, se han desarrollado métodos exactos y heurísticos.

Con la finalidad de ilustrar el impacto de tener en cuenta las preferencias de los clientes, se introduce un ejemplo. Se consideran cinco posibles instalaciones y siete clientes; también, se asume que deben ubicarse dos instalaciones. Los costos correspondientes y las preferencias de los clientes (el orden preestablecido por los clientes hacia las instalaciones) se muestran entre paréntesis en la Figura 1.

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 2 & 7 & 3 & 1 & 8 & 6 \\ 6 & 7 & 2 & 2 & 5 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 6 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 8 & 10 & 2 & 4 & 7 & 1 & 7 \end{bmatrix} \qquad g_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 5 & 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

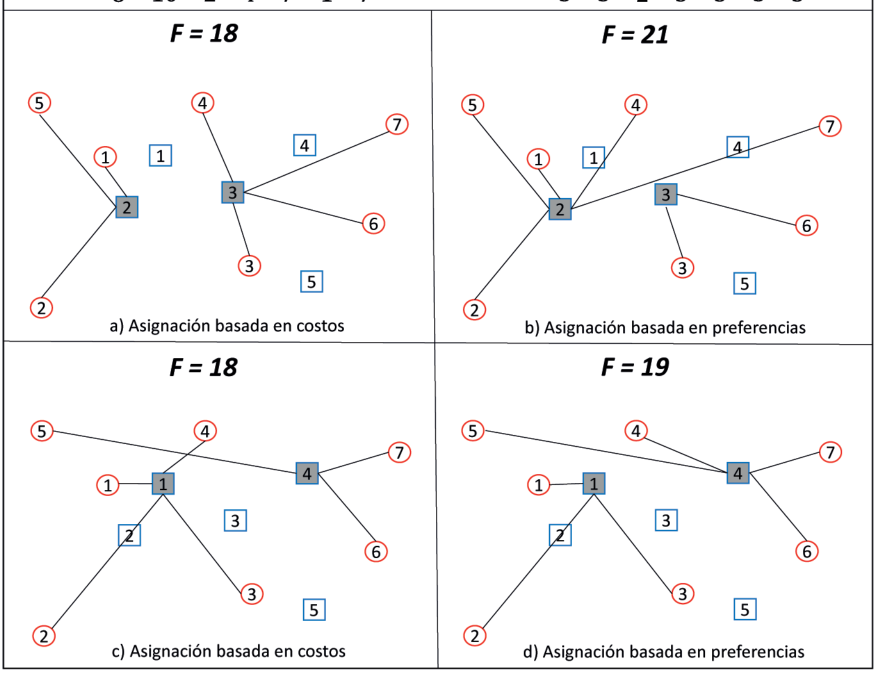

Figura 1
Ejemplo con i = {1,...,5}, j = {1,...,7} y p= 2
Fuente: Elaboración propia

En primer lugar, suponga que las instalaciones localizadas son [2,3]. Bajo el esquema de la p-mediana, los clientes [1,2,5] se asignan a la instalación 2 y los clientes [3,4,6,7] a la instalación 3. El costo asociado es de 18 (ver Figura 1, ítem a). Entonces, bajo el esquema de la asignación con base en las preferencias, los clientes se asignan con respecto al orden que establecieron (el objetivo es minimizar). En este caso, los clientes [1,2,4,5,7] se asignan a la instalación 2 y los clientes [3,6] a la instalación 3; el costo de este esquema es de 21 (ver figura 1, ítem b). Ahora, considere un par diferente de instalaciones localizadas, esto es, [1,4]. En el esquema estándar de la p-mediana, los clientes se asignan en [1,2,3,4] y [5,6,7] para las instalaciones 1 y 4, respectivamente; incurriendo en un costo de 18 (ver Figura 1, ítem c). En el esquema cuando se consideran las preferencias, los clientes [1,2,3] se asignan a la instalación 1 y los clientes [4,5,6,7] a la instalación 4. El costo de esta decisión es 19 (ver Figura 1, ítem d).

Observaciones importantes surgen del ejemplo ilustrativo. Se puede notar que teniendo en cuenta las preferencias de los clientes los costos se ven afectados negativamente, pero permite incluir la opinión de los clientes en el proceso de decisión.

Los primeros en tomar en cuenta las preferencias de los clientes fueron Hanjoul & Peeters (1987). Para considerarlas, se introdujo un conjunto de restricciones en el modelo. El problema es conocido como el Problema Simple de Localización de Plantas con Orden (SPLPO, por sus siglas en inglés). El objetivo es elegir las instalaciones por ubicar de tal manera que se minimicen los costos totales. Para resolver el problema, inicialmente se hace un pre-procesamiento, donde se incorpora una cierta parte del conjunto de restricciones que permite considerar las preferencias de los clientes. Después, se utiliza un algoritmo heurístico basado en *branch and bound*.

En Ausiello *et al.* (1999) se presenta un resultado que permite la clasificación de los problemas de localización de instalaciones con preferencias de los clientes y todas sus variantes como *NP-hard*. En este trabajo, se consideran los intereses de los clientes diferentes a los costos de distribución y se muestra que este problema no se puede resolver en tiempo polinomial.

En Cánovas, García, Labbé & Marín (2007) se considera la formulación del SPLPO y se resuelven dos relajaciones, una para el problema entero y otra que es fortalecida con un pre-procesamiento donde se utiliza el algoritmo *branch and bound*. Se proponen nuevas desigualdades válidas para considerar las preferencias. Debido al pre-procesamiento se logra reducir el gap de integralidad dentro de un tiempo computacional razonable.

En los trabajos que se mencionaron anteriormente, se añadieron restricciones y/o variables en los modelos para que se tomaran en cuenta las preferencias de los clientes. Sin embargo, hay otras maneras de abordar esta situación, por ejemplo, formularla como un modelo de programación binivel.

El primer modelo binivel donde se consideran las preferencias de los clientes se propone en Hansen, Jaumard & Savard (1992). Se estudia el SPLPO y se reformula como un modelo de un solo nivel utilizando funciones pseudo-booleanas para relajar el problema del seguidor y obtener cotas inferiores válidas. Se muestra que la reformulación que se propone, domina tres nuevas formulas (propuestas previamente) desde el punto de vista de relajación de programación lineal.

En Vasilév, Klimentova & Kochetov (2009) también se reformula el problema binivel como un modelo de uno solo, pero utilizando desigualdades cliqué. En lugar de aumentar el número de variables, utilizaron una nueva familia de desigualdades válidas para obtener cotas inferiores. Además, se demuestra que el caso cooperativo y no cooperativo se puede reducir a un solo caso en el que cada cliente tiene una preferencia ordenada del conjunto de instalaciones que se localizarán y, que la solución óptima del nivel inferior es única debido a la estructura de las preferencias, es decir, son números consecutivos del uno al número total de instalaciones.

En Vasilév & Klimentova (2010) se analiza la eficiencia de la familia de desigualdades que se proponen en Vasilév, Klimentova & Kochetov (2009). Se considera el modelo binivel y se formula como un problema de un solo nivel. Se implementa el método de planos cortantes con base en la familia de desigualdades válidas y obtienen cotas inferiores. Además, se diseña un algoritmo heurístico basado en recocido simulado para obtener valores cercanos al óptimo, se utilizan como cotas superiores. Con ambas cotas se hace un pre-procesamiento uniendo los métodos planos cortantes y recocido simulado mediante *branch and cut* para obtener el óptimo. Los resultados numéricos muestran una reducción en el gap de optimización obtenido por Cánovas *et al.* (2007).

En Marić, Stanimirović, Milenković & Đenić (2015), se muestra una comparación entre tres métodos meta-heurísticos diseñados para resolver el SPLPO, la versión binivel del modelo. Los algoritmos propuestos son: enjambre de partículas, recocido simulado y un algoritmo hibridado de búsquedas locales de vecindario variable. Implementaron una estrategia eficiente para resolver el nivel inferior a optimalidad. Los tres métodos muestran un buen rendimiento, pero el que obtuvo un mejor desempeño fue el algoritmo híbrido.

El resto de este capítulo se divide de la siguiente manera: a continuación se presentan algunas contribuciones en los problemas de localización de instalaciones con preferencias de los clientes; luego se expone una discusión de estos aportes y se mencionan algunos algoritmos heurísticos que se han propuesto para estos problemas y, finalmente, se exponen las conclusiones.

2. CONTRIBUCIONES

En la introducción se presenta el problema sin capacidades y en la sección 2.2 el problema de la p-mediana. Finalmente, en la sección 2.3 se muestra el problema considerando capacidades.

2.1 El problema de localización de instalaciones sin capacidades

Se presenta el modelo estudiado en Camacho-Vallejo, Cordero-Franco & González-Ramírez (2014a). En este trabajo se desarrollan dos reformulaciones del problema binivel reduciéndolo a un problema de programación entera mixta de un solo nivel mediante el uso de las relaciones primal-dual del nivel inferior.

A continuación, se presenta el modelo. Sean i las instalaciones y j los clientes, donde $i \in I$ y $j \in J$. Los parámetros del modelo son: C_{ij} representa el costo de abastecer toda la demanda del cliente j por la instalación i,f_i, es el costo fijo de localización de la instalación i y P_{ij} es la preferencia del cliente j de ser atendido por la instalación i. En el problema se tienen dos variables de decisión binarias: Y_i indica si la instalación i se localiza (variable del líder) y la X_{ij} muestra si la instalación i abastece la demanda del cliente j (variable del seguidor). Por otro lado, se consideran dos supuestos: 1) los clientes a priori establecen sus preferencias ordenadas de cada una de las instalaciones como una lista de números consecutivos del 1 a |I| donde 1 es la instalación más preferida y |I| la menos preferida; y 2) las instalaciones no tienen restricción de capacidad, *i.e.*, una instalación puede abastecer la demanda de varios clientes pero un cliente debe ser abastecido por una sola instalación.

Entonces, la formulación matemática del modelo binivel es:

$$\min_{y,x} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} f_i y_i \qquad (1)$$

$$\text{sujeto a: } y_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \in I \qquad (2)$$

$$x \in \operatorname{Argmin} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{ij} x_{ij} \qquad (3)$$

$$\text{sujeto a: } \sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \in J \qquad (4)$$

$$xij \leq yi \qquad \forall i \in I, j \in J \qquad (5)$$

$$xij \in \{0,1\} \qquad \forall i \in I, j \in J \qquad (6)$$

En la ecuación (1) se presenta la función objetivo de nivel superior, donde el líder desea minimizar los costos de distribución y de localización. La restricción (2) indica la naturaleza de las variables del líder. La restricción (3) indica que las variables X_{ij}, son controladas por el nivel inferior y que están implícitamente determinadas por la solución óptima del problema del seguidor. Esta restricción describe la función de objetivo de nivel inferior, donde los clientes quieren minimizar sus preferencias hacia las instalaciones. En (4) se indica que un cliente debe ser atendido por una sola instalación, en (5) se establece que un cliente debe ser atendido en una instalación que está localizada. Finalmente, la (6) es la limitante del signo de las variables del nivel inferior.

Para asegurar que el problema esté bien definido, debe existir una solución óptima única en el problema del nivel inferior para cada decisión del nivel superior. Esta propiedad se garantiza por la estructura de las preferencias dadas por los clientes. La prueba de este resultado es presentada por Vasilév, Klimentova & Kochetov (2009).

Para resolver el problema, se presentan dos reformulaciones clásicas utilizadas en problemas de programación binivel para reducirlo a un solo nivel por: Bard (1998) y Dempe (2002). Estos métodos utilizan las condiciones de optimalidad primal-dual del nivel inferior. Se puede ver fácilmente que, si la variable del líder se fija, entonces el nivel inferior implica las clásicas restricciones desagregadas del SPLPO. Por lo tanto, la propiedad de asignación única se mantiene asegurando que un cliente será totalmente abastecido por su instalación más preferida (Krarup & Pruzan, 1983 y Galvao, 2004).

Por lo tanto, las variables binarias X_{ij} pueden ser relajadas sin que la solución óptima entera se vea afectada. Entonces, $Xij \in [0,1]$ se reemplaza por $Xij \geq 0$. Ahora, el problema del nivel inferior es un problema de programación lineal. Entonces, se pueden obtener las condiciones de optimalidad primal-dual. Para reducir el problema binivel a un problema de un solo nivel se pueden usar estas relaciones primal-dual garantizando la optimalidad del problema binivel.

Primero, el problema del nivel inferior debe ser obtenido. Sean $\alpha j, \forall j \in J$ y $\beta_{ij}, \forall i \in I, j \in J$ las variables duales asociadas a las restricciones del problema del seguidor, donde αj es la variable dual para la restricción (4) del primal mientras que la variable dual β_{ij} es para la restricción (5). Entonces el problema dual del seguidor queda como sigue:

$$\max_{\alpha,\,\beta} \sum_{j\epsilon J} \alpha_j + \sum_{i\epsilon I} \sum_{j\epsilon J} y_i \beta_{ij} \tag{7}$$

sujeto a:

$$\alpha_j + \beta_{ij} \leq p_{ij} \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{8}$$

$$\beta_{ij} \leq 0 \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{9}$$

$$\alpha_j \epsilon \mathrm{R} \qquad \forall j\epsilon J \tag{10}$$

La primera reformulación consiste en reemplazar el problema del nivel inferior por sus restricciones primal y dual. Para garantizar la optimalidad del nivel inferior, las funciones objetivos primal y dual se igualan. Entonces, el modelo queda de la siguiente manera:

$$\min_{y,\,x,\,\alpha,\,\beta} \sum_{i\epsilon I} \sum_{j\epsilon J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i\epsilon I} f_i y_i \tag{11}$$

sujeto a:

$$y_i \epsilon \{0,1\} \qquad \forall i\epsilon I \tag{12}$$

$$\sum_{i\epsilon I} x_{ij} = 1 \qquad \forall j\epsilon J \tag{13}$$

$$x_{ij} \leq y_i \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{14}$$

$$\alpha_j + \beta_{ij} \leq p_{ij} \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{15}$$

$$\sum_{i\epsilon I} \sum_{j\epsilon J} p_{ij} x_{ij} = \sum_{j\epsilon J} \alpha_j + \sum_{i\epsilon I} \sum_{i\epsilon J} \beta_{ij} y_i \tag{16}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in I, j \in J \qquad (17)$$

$$\beta_{ij} \leq 0 \qquad \forall i \in I, j \in J \qquad (18)$$

$$\alpha_j \in \mathrm{R} \qquad \forall j \in J \qquad (19)$$

Las ecuaciones (11) y (12) corresponden al líder, la función objetivo y las restricciones respectivamente. Las restricciones que garantizan la factibilidad primal del seguidor son (13), (14) y (17); y la factibilidad dual son (15), (18) y (19). La restricción que asegura la optimalidad del nivel inferior es la (16); es fácil ver que la restricción es no lineal. Además, el problema (11) - (19) añade $|I||J|+|J|$ variables $|I||J|+1$ y restricciones.

Con la finalidad de resolver el problema, la restricción (16) debe linealizarse. Sea *πij* variables auxiliares. Entonces, se hace *πij=βij yi*. Se puede ver que, si *yi=0*, entonces *πij=0; y si yi=1*, entonces *πij=βij*. Esto se puede hacer mediante la introducción de las siguientes desigualdades:

$$\pi_{ij} \leq 0 \qquad \forall i \in I, j \in J \qquad (20)$$

$$\pi_{ij} \geq -My_i \qquad \forall i \in I, j \in Jv \qquad (21)$$

$$\pi_{ij} \geq \beta_{ij} \qquad \forall i \in I, j \in J \qquad (22)$$

$$\pi_{ij} + My_i \leq \beta_{ij} + M \qquad \forall i \in I, j \in J \qquad (23)$$

Como resultado, se genera un modelo de programación entera mixta que es equivalente al modelo binivel (1) - (6). El modelo reformulado queda de la siguiente manera:

$$\min_{y,\,x,\,\alpha,\,\beta} \sum_{i\epsilon I} \sum_{j\epsilon J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i\epsilon I} f_i y_i \tag{24}$$

sujeto a:

$$y_i \in \{0,1\} \qquad \forall i\epsilon I \tag{25}$$

$$\sum_{i\epsilon I} x_{ij} = 1 \qquad \forall j\epsilon J \tag{26}$$

$$x_{ij} \le y_i \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{27}$$

$$\alpha_j + \beta_{ij} \le p_{ij} \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{28}$$

$$\sum_{i\epsilon I} \sum_{j\epsilon J} p_{ij} x_{ij} = \sum_{j\epsilon J} \alpha_j + \sum_{i\epsilon I} \sum_{i\epsilon J} \pi_{ij} \tag{29}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{30}$$

$$\beta_{ij} \le 0 \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{31}$$

$$\alpha_j \in \mathrm{R} \qquad \forall j\epsilon J \tag{32}$$

$$\pi_{ij} \le 0 \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{33}$$

$$\pi_{ij} \ge -My_i \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{34}$$

$$\pi_{ij} \ge \beta_{ij} \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{35}$$

$$\pi_{ij} + My_i \le \beta_{ij} + M \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{36}$$

Esta reformulación añade $2|I||J|+|J|$ variables y $4|I||J|+1$ restricciones. Cabe mencionar que esta reformulación del problema, utilizando las relaciones primal-dual, es solo una alternativa para resolverlo. Existe otra forma de reformular el problema binivel y es utilizando la holgura complementaria. Para este esquema la restricción (16) puede ser sustituida por las siguientes restricciones de complementariedad que fuerzan la holgura complementaria:

$$x_{ij}\,(\alpha_j + \beta_{ij} - p_{ij}) = 0 \qquad \forall i \epsilon I, j \epsilon J \qquad (37)$$

$$\beta_{ij}\,(x_{ij} - y_i) = 0 \qquad \forall i \epsilon I, j \epsilon J \qquad (38)$$

Es fácil ver que ambas restricciones son no lineales. Como x_{ij} y $(x_{ij} - y_i)$ son binarias, entonces pueden ser linealizadas con las siguientes ecuaciones:

$$\alpha_j + \beta_{ij} - p_{ij} \geq - M\,(1 - x_{ij}) \qquad \forall i \epsilon I, j \epsilon J \qquad (39)$$

$$\beta_{ij} \geq - M\,(1 + (x_{ij} - y_i)) \qquad \forall i \epsilon I, j \epsilon J \qquad (40)$$

Donde M es una constante positiva y suficientemente grande.

Podemos ver que si $x_{ij} = 0$, entonces de (39) tenemos que $\alpha_j + \beta_{ij} - p_{ij} \geq -M$ y como $\alpha_j + \beta_{ij} - p_{ij} \leq 0$ se cumple; y de (40) tenemos que $\beta_{ij} \geq 0$ pero como $\beta_i \leq 0$ entonces $\beta_i = 0$. Ahora, si $x_{ij} = 1$, entonces de (39) tenemos que $\alpha_j + \beta_{ij} - p_{ij} \geq 0$ y como $\alpha_j + \beta_{ij} - p_{ij} \leq 0$, entonces $\alpha_j + \beta_{ij} - p_{ij} = 0$; y de (40) tenemos que $\beta_{ij} \geq -M$ pero como $\beta_{ij} \leq 0$ se cumple.

Entonces el problema resultante de programación entera mixta es equivalente al problema binivel (1) - (6) y puede ser considerado como la segunda linealización a un nivel del problema. El modelo reformulado queda de la siguiente manera:

$$\min_{y,\,x,\,\alpha,\,\beta} \sum_{i \epsilon I} \sum_{j \epsilon J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \epsilon I} f_i y_i \qquad (41)$$

sujeto a:

$$y_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \epsilon I \qquad (42)$$

$$\sum_{i \epsilon I} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \epsilon J \qquad (43)$$

$$x_{ij} \leq y_i \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \qquad (44)$$

$$\alpha_j + \beta_{ij} \leq p_{ij} \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \qquad (45)$$

$$x_{ij} \epsilon \{0,1\} \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \qquad (46)$$

$$\beta_{ij} \leq 0 \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \qquad (47)$$

$$\alpha_j \epsilon \mathrm{R} \qquad \forall j\epsilon J \qquad (48)$$

$$\alpha_j + \beta_{ij} - p_{ij} \geq -M\,(1 - x_{ij}) \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \qquad (49)$$

$$\beta_{ij} \geq -M\,(1 + (x_{ij} - y_i)) \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \qquad (50)$$

En esta reformulación se añaden $3|I||J|$ restricciones y $|I||J|+|J|$ variables adicionales. Por lo tanto, es significativamente menor que la reformulación (24) - (36).

2.2 El problema de la p-mediana

Cuando el número total de instalaciones por localizar es conocido, el problema es llamado p-mediana. Este problema se propone en Alekseeva & Kochetov (2007). En este trabajo se desarrollan varias reformulaciones de un solo nivel para la obtención de cotas inferiores, las cuales se basan en diferentes versiones de funciones pseudo-booleanas. Luego, se diseña un algoritmo genético hibridizado con búsquedas locales para obtener cotas superiores. Las reformulaciones y el algoritmo híbrido se proponen para la versión de un nivel del problema, es decir, el problema no lo consideran como un modelo de optimización binivel.

Después, en Camacho-Vallejo, Casas-Ramírez & Miranda (2014b), se presenta un modelo binivel similar al estudiado en Alekseeva & Kochetov (2007). La principal diferencia es que en Camacho-Vallejo, Casas-Ramírez & Miranda (2014b) se consideran costos fijos de instalación.

Sea p el número de instalaciones por localizar. Además, se hace un cambio de variable para evitar confusiones de p_{ij} por g_{ij}. Entonces, el modelo matemático es el siguiente:

$$\min_{y} \sum_{i \epsilon I} \sum_{j \epsilon J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \epsilon I} f_i y_i \tag{51}$$

$$\text{sujeto a:} \quad \sum_{i \epsilon I} y_i = p \tag{52}$$

$$y_i \epsilon \{0,1\} \qquad \forall i \epsilon I \tag{53}$$

$$x \, \epsilon \, \text{Arming} \sum_{i \epsilon I} \sum_{j \epsilon J} g_{ij} x_{ij} \tag{54}$$

$$\text{sujeto a:} \quad \sum_{i \epsilon I} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \epsilon I \tag{55}$$

$$x_{ij} \leq y_i \qquad \forall i \epsilon I, j \epsilon J \tag{56}$$

$$x_{ij} \epsilon \{0,1\} \qquad \forall i \epsilon I, j \epsilon J \tag{57}$$

Comparando este modelo con el presentado en el aparte 2.1 se puede observar que la única diferencia es la restricción (52) en el líder. Además, se pueden aplicar las condiciones de optimalidad primal-dual para reformular el problema a uno de un solo nivel de manera análoga que en 2.1.

Entonces, utilizando la reformulación de la igualdad de las funciones objetivos, primal y dual, del nivel inferior, y linealizando las ecuaciones necesarias se obtiene el siguiente modelo de un solo nivel.

$$\min_{y,\,x,\,\alpha,\,\beta} \sum_{i\epsilon I} \sum_{j\epsilon J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i\epsilon I} f_i y_i \tag{58}$$

$$\text{sujeto a: } \sum_{i\epsilon I} y_i = p \tag{59}$$

$$y_i \epsilon \{0,1\} \qquad \forall i\epsilon I \tag{60}$$

$$\sum_{i\epsilon I} x_{ij} = 1 \qquad \forall i\epsilon I \tag{61}$$

$$x_{ij} \leq y_i \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{62}$$

$$\alpha_j + \beta_{ij} \leq g_{ij} \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{63}$$

$$\sum_{i\epsilon I} \sum_{j\epsilon J} g_{ij} x_{ij} = \sum_{j\epsilon J} \alpha_j + \sum_{i\epsilon I} \sum_{i\epsilon J} \pi_{ij} \tag{64}$$

$$x_{ij} \epsilon \{0,1\} \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{65}$$

$$\beta_{ij} \leq 0 \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{66}$$

$$\alpha_j \epsilon \mathrm{R} \qquad \forall j\epsilon J \tag{67}$$

$$\pi_{ij} \leq 0 \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{68}$$

$$\pi_{ij} \geq -Myi \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{69}$$

$$\pi_{ij} \leq \beta_{ij} \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{70}$$

$$\pi_{ij} + My_i \leq \beta_{ij} + M \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{71}$$

Aplicando la reformulación de la holgura complementaria y linealizando las restricciones necesarias se obtiene el siguiente modelo:

$$\min_{y,\,x,\,\alpha,\,\beta} \sum_{i\epsilon I} \sum_{j\epsilon J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i\epsilon I} f_i y_i \tag{72}$$

sujeto a:
$$\sum_{i\epsilon I} y_i = p \tag{73}$$

$$y_i \epsilon \{0,1\} \qquad \forall i\epsilon I$$

$$\sum_{i\epsilon I} x_{ij} = 1 \qquad \forall j\epsilon J \tag{74}$$

$$x_{ij} \leq y_i \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{75}$$

$$\alpha_j + \beta_{ij} \leq g_{ij} \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{76}$$

$$x_{ij} \epsilon \{0,1\} \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{77}$$

$$\beta_{ij} \leq 0 \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{78}$$

$$\alpha_j \epsilon \mathrm{R} \qquad \forall j\epsilon J \tag{79}$$

$$\alpha_j + \beta_{ij} - g_{ij} \geq -M\,(1 - x_{ij}) \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{80}$$

$$\beta_{ij} \geq -M\,(1 + (x_{ij} - y_i)) \qquad \forall i\epsilon I, j\epsilon J \tag{81}$$

Analizando los dos modelos resultantes de las reformulaciones, es evidente que este último (holgura complementaria) es mucho menor en tamaño que el de la igualdad de las funciones objetivo.

Por otro lado, en Camacho-Vallejo, Casas-Ramírez & Miranda (2014b) se presenta otra reformulación donde el problema se reduce a uno de un solo nivel a través de la sustitución del problema del seguidor por el siguiente conjunto de restricciones:

$$\sum_{i \in I} x_{ij} g_{ij} \leq g_{ij} y_i + G_{max} (1 - y_i) \qquad \forall i \in I, j \in J \qquad (82)$$

Donde $G_{max} = max(g_{ij}) + 1 \qquad \forall i \in I, j \in J \qquad (83)$

El punto clave es la ecuación (82), que es un tipo de restricción de asignación a la más cercana. En detalle, si se localiza la instalación i, entonces $Gmax\ (1 - y_i)$ es igual a cero e implica que entre todas las asignaciones posibles, se asignará el cliente j a la instalación más preferida. Por el contrario, la instalación i no es ubicada, $g_{ij}\, y_i$ es igual a cero por lo que esta restricción se relaja ya que $G\ max$ actúa como una cota superior para todas las preferencias ordenadas.

Entonces, el problema reformulado es equivalente al problema binivel analizado y se muestra a continuación:

$$\min_{y,\, x} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} f_i y_i \qquad (84)$$

sujeto a:

$$\sum_{i \in I} y_i = p \qquad (85)$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad (86)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \in J \qquad (87)$$

$$x_{ij} \leq y_i \qquad \forall i \in I, j \in J \qquad (88)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} g_{ij} \leq g_{ij} y_i + G_{max} (1 - y_i) \qquad \forall i \in I, j \in J \qquad (89)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in I, j \in J \qquad (90)$$

Es común que, cuando se estudian problemas de la p-mediana, los costos fijos se omiten. En Camacho-Vallejo, Casas-Ramírez & Miranda (2014b) sí se consideraron. En el caso de que se asuman costos fijos homogéneos, es fácil ver que el modelo no se afecta. Sin embargo, en los problemas se consideraron los costos fijos, son heterogéneos. La experimentación numérica permite concluir que estos métodos exactos requieren un esfuerzo computacional significativo.

2.3. El problema de localización de instalaciones con capacidades

Se puede recordar que en ninguno de los trabajos mencionados en la introducción consideran capacidades y demandas en el problema. Solo se han encontrado pocos artículos donde se toman en cuenta. Por ejemplo, en Caramia & Mari (2016) donde el líder localiza las instalaciones y decide la capacidad correspondiente a cada instalación para minimizar los costos, el seguidor selecciona la fracción de demanda de los clientes que cada instalación deberá abastecer. La ventaja que se tiene es que el problema de nivel inferior es de programación lineal que se puede resolver sin complicaciones.

En Casas-Ramírez, Camacho-Vallejo & Martínez-Salazar (2017) se consideran también capacidades y demandas, pero el problema del nivel inferior es el Problema de Asignación Generalizada (GAP, por sus siglas en inglés), el cual es *NP-hard* y por lo tanto su resolución óptima no puede ser siempre garantizada. El modelo que se propone en este trabajo es el siguiente:

$$\min_{y,\,x} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} f_i y_i \qquad (91)$$

$$\text{sujeto a:} \qquad y_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \qquad (92)$$

$$x \in \text{Arg max} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} x_{ij} \tag{93}$$

sujeto a:
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \tag{94}$$

$$\sum_{j=1}^{m} d_j x_{ij} \leq b_i y_i \qquad \forall i \tag{95}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i, j \tag{96}$$

Podemos observar que la nueva restricción (95) nos garantiza que las instalaciones localizadas atenderán la demanda de todos los posibles clientes sin sobrepasar su capacidad de producción.

En ese trabajo se proponen cotas válidas del problema, basadas en las reformulaciones del problema relajado. Se procede de manera análoga que en el aparte 2.1 para la aplicación de las reformulaciones clásicas de programación binivel.

Se sustituye $x_{ij} \in [0,1]$ por $x_{ij} \geq 0$. Sean, u_j y v_i las variables duales asociadas al problema del nivel inferior. Entonces, el problema dual del nivel inferior es:

$$\min_{u,\, v} \sum_{j=1}^{m} u_j + \sum_{i=1}^{n} b_i y_i v_i \tag{97}$$

sujeto a:
$$u_j + d_j v_i \geq p_{ij} \qquad \forall i, j \tag{98}$$

$$vi \geq 0 \qquad \forall i \tag{99}$$

Empleando la reformulación con base en la igualdad de la función objetivo, el problema resultante es el que se presenta a continuación:

$$\min_{y,\,x,\,u,\,v,\,z} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} f_i y_i \qquad (100)$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \qquad (101)$$

$$\sum_{j=1}^{m} d_j x_{ij} \leq b_i y_i \qquad \forall i \qquad (102)$$

$$u_j + d_j v_i \geq p_{ij} \qquad \forall i, j \qquad (103)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} u_i + \sum_{i=1}^{n} b_i z_i \qquad (104)$$

$$z_i \geq 0 \qquad \forall i \qquad (105)$$

$$z_i \leq M_1 y_i \qquad \forall i \qquad (106)$$

$$z_i \leq v_i \qquad \forall i \qquad (107)$$

$$z_i - M_1 y_i \geq v_i - M_1 \qquad \forall i \qquad (108)$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \qquad (109)$$

$$x_{ij}, v_i \geq 0 \qquad \forall i,j \qquad (110)$$

Ahora, el modelo resultante con la reformulación basada en la holgura complementaria es:

$$\min_{y,\,x,\,u,\,v,\,\alpha,\,\beta} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} f_i y_i \tag{111}$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \tag{112}$$

$$\sum_{j=1}^{m} d_j x_{ij} \leq b_i y_i \qquad \forall i \tag{113}$$

$$u_j + d_j v_i \geq p_{ij} \qquad \forall i, j \tag{114}$$

$$x_{ij} \leq M_2 (1 - \alpha_{ij}) \qquad \forall i, j \tag{115}$$

$$u_j + d_j v_i - p_{ij} \leq M_2 \alpha_{ij} \qquad \forall i, j \tag{116}$$

$$b_i y_i - \sum_{j=1}^{m} d_j x_{ij} \leq M_3 \beta_i \qquad \forall i \tag{117}$$

$$v_i \leq M_3 (1 - \beta_i) \qquad \forall i \tag{118}$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \tag{119}$$

$$x_{ij}, v_i \geq 0 \qquad \forall i,j \tag{120}$$

$$\alpha_{ij}, \beta_i \in \{0,1\} \qquad \forall i,j \tag{121}$$

Comparando ambos modelos y sin considerar las restricciones de signos de las variables, en el modelo se tienen $3mn+3n+1$ restricciones adicionales y $m+2n$ variables extra. Por otro lado, en el segundo modelo se añaden $5mn+2n$ nuevas restricciones y $mn+m+2n$ variables. Por lo tanto, es fácil ver que el segundo modelo es mayor que el primer modelo en términos del número de restricciones y variables.

Además, en Casas-Ramírez & Camacho-Vallejo (2017) presentan otra reformulación clásica. En este esquema la función objetivo del seguidor es ignorada. Por lo tanto, el modelo queda de la siguiente manera.

$$\min_{y,x} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} f_i y_i \tag{122}$$

sujeto a:

$$y_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \tag{123}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \tag{124}$$

$$\sum_{j=1}^{m} d_j x_{ij} \leq b_3 y_i \qquad \forall i \tag{125}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j \tag{126}$$

Como es de esperar, este tipo de reformulación es poco utilizada debido a que las cotas generadas tienen una calidad pobre porque el objetivo del seguidor es totalmente ignorado.

3. DISCUSIÓN

En la planificación de experimentos su valor está condicionado con la capacidad de definir un juicio referente a las estadísticas de la población o universo asociado a la práctica experimental (Insignares & Orozco, 2014). Es importante mencionar que, si el problema se formula como un modelo binivel, tendrá solo un par de restricciones (sin considerar las de signo), donde una de ellas es otro problema de optimización. Comparando con las reformulaciones que se proponen, se puede ver que en algunas el número de variables puede mantenerse, pero se incrementa el número de restricciones.

Ambos enfoques del modelo tienen su grado de dificultad: en el modelo binivel hay un problema de optimización dentro de una restricción, lo cual complica su resolución; por el otro lado, en las reformulaciones de los modelos el número de restricciones y de variables aumenta.

Sin embargo, las reformulaciones propuestas de los problemas a pesar de aumentar de tamaño pueden resolverse mediante un *software* especializado para optimizar los problemas de programación matemática. El inconveniente que tienen las reformulaciones es que el tiempo computacional que requieren es significativo y aumenta conforme el tamaño de instancia se incrementa; en algunos casos hasta les resulta imposible resolver.

En la Figura 2, que se presenta en Casas-Ramírez & Camacho-Vallejo (2017), puede verse que el tiempo consumido por la reformulación clásica (cuadrado) y el de la reformulación donde se igualan las funciones objetivo (triángulo) es menor que el requerido por un algoritmo enumerativo (círculo).

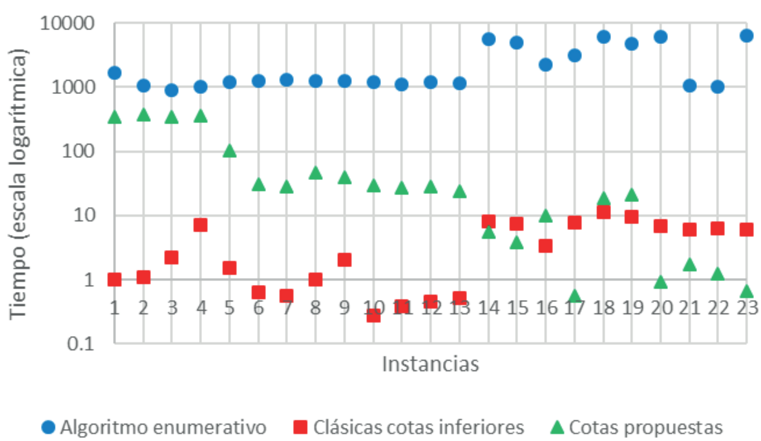

Figura 2
Tiempo requerido (en segundos)
Fuente: Elaboración propia

Después, en la Figura 3 se compara el gap de optimalidad de ambas reformulaciones que se proponen; puede verse que, como era de esperarse, la reformulación que tiene un gap mucho mayor es aquella donde la función objetivo del seguidor es ignorada.

Figura 3
Gap de optimalidad
Fuente: Elaboración propia

De las dos figuras anteriores podemos concluir que las reformulaciones a un nivel de un problema binivel son una buena alternativa para resolver estos problemas debido a que consumen menor tiempo comparado con el requerido por un algoritmo enumerativo. Por otro lado, comparando las reformulaciones podemos ver que si bien la reformulación donde se omite la función objetivo del seguidor es más rápida, es la que provee una cota de menor calidad. Además, a nuestro conocimiento, aún no existe un *software* comercial capaz de resolver un problema binivel de forma general.

Con base en lo anterior, en algunos trabajos se proponen algoritmos heurísticos para encontrar soluciones de buena calidad en tiempo razonable ya sea para el modelo reformulado o la versión binivel del problema.

Por ejemplo, en Camacho-Vallejo, Cordero-Franco & González-Ramírez (2014a), se propone un algoritmo Stackelberg-Evolutivo para resolver la versión binivel del problema de localización de instalaciones sin capacidades. Para probar el rendimiento del algoritmo y de las reformulaciones se trabaja con las instancias de Cánovas, García, Labbé & Marín (2007) y se generan otros conjuntos de instancias de mayor tamaño de hasta de 500 instalaciones y 1.000 clientes.

Además, en Maldonado-Pinto, Casas-Ramírez & Camacho-Vallejo (2016) se estudia este mismo problema y se propone un algoritmo híbrido evolutivo con re-encadenamiento de trayectorias para su resolución. El problema del nivel inferior se resuelve con tres diferentes esquemas: un optimizador, un método exacto alternativo y un procedimiento donde el nivel inferior no se resuelve en cada movimiento del re-encadenamiento de trayectorias.

En Casas-Ramírez, Camacho-Vallejo & Martínez-Salazar (2017) se proponen tres versiones de un algoritmo híbrido para resolver la versión binivel del problema considerando capacidades. En este algoritmo el nivel superior se resuelve con la heurística entropía cruzada y el nivel inferior con tres procedimientos diferentes: con un optimizador (soluciones factibles binivel) y dos métodos constructivos (soluciones alcanzables binivel); la primera basada en las preferencias de los clientes y la segunda teniendo en cuenta un costo de arrepentimiento de no seleccionar a la instalación más preferida.

También, en otros trabajos donde se estudian problemas diferentes de programación binivel se proponen algoritmos heurísticos para su resolución. Por ejemplo, en Díaz, Luna, Camacho-Vallejo & Casas-Ramírez (2017) se plantea para resolver un problema de máxima cobertura un GRASP-Tabu, mientras que Camacho-Vallejo, Muñoz-Sánchez & González-Velarde (2015a) se expone un algoritmo híbrido de búsqueda dispersa con GRASP para un problema de planificación de producción y distribución en una cadena de suministro, en Camacho-Vallejo, Mar-Ortiz, López-Ramos & Pedraza Rodríguez (2015b) se resuelve un problema de diseño topológico de una red de área local con un algoritmo genético. En Kalashnikov, Herrera-Maldonado, Camacho-Vallejo & Kalashnykova (2016) el problema de fijación de cuotas en autopistas se estudia y para resolverlo se desarrolla un algoritmo basado en análisis de sensibilidad.

4. CONCLUSIONES

En este capítulo se han discutido problemas de localización de instalaciones con preferencias de los clientes modelados con programación binivel. El nivel superior es el localizador que desea minimizar los costos totales de instalación y el nivel inferior, que implica a los clientes, quiere optimizar las preferencias de los clientes sobre las instalaciones.

En particular, se presentaron tres modelos donde el primero es considerando que no existe capacidad en las instalaciones; en el segundo se tiene como supuesto que se deben de localizar exactamente un número particular de instalaciones por lo que es conocido como el problema de la p-mediana; por último, se considera una estructura donde existe capacidad en las instalaciones por lo que el grado de complejidad del problema aumenta significativamente al tener un problema *NP-hard* en el nivel inferior.

Las características de los modelos permiten aplicar las reformulaciones clásicas de programación binivel para reducirlos a problemas de un solo nivel. Las reformulaciones se basan en las condiciones de optimalidad primal-dual del nivel inferior. Para garantizar la optimalidad de la solución del nivel inferior se consideran dos esquemas comunes: forzando la igualdad de las funciones objetivo del primal y dual del nivel inferior y, añadiendo las restricciones de holgura complementaria.

Por otro lado, se puede reformular el modelo a un nivel ignorando la función objetivo del seguidor. Es conocido que este método provee soluciones de mala calidad y por eso normalmente no se considera este esquema. Además, también se ha mostrado que pueden explotar las propiedades del nivel inferior para reemplazarlo con algún conjunto de restricciones.

Debido a que en los modelos resultantes de las reformulaciones se añaden restricciones y variables, el tamaño de los modelos aumenta considerablemente; este hecho afecta en el tiempo de cómputo requerido por lo cual no son una opción idónea cuando se resuelven instancias de dimensiones grandes. Es por esto que se debe recurrir a otras opciones para la obtención de soluciones de calidad y que soliciten un tiempo computacional razonable, como por ejemplo algoritmos heurísticos.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alekseeva, E. & Kochetov, T. (2007). Genetic local search for the p-median problem with client's preferences. *Diskret. Anal. Issled. Oper, 14*, 3-31.

Ausiello, G., Protasi, M., Marchetti-Spaccamela, A., Gambosi, G., Crescenzi, P. & Kann, V. (1999). *Complexity and approximation: combinatorial optimization problems and their approximability properties.* Berlin, Germany: Springer.

Bard, J. F. (1998). *Practical bilevel optimization. Algorithms and applications*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Camacho-Vallejo, J. F., Casas-Ramírez, M. S. & Miranda, P. (2014b). The p-median bilevel problem under preferences of the customers. In R. Z. Ros-Mercado et al. (Eds.): *Recent Advances in Theory, Methods, and Practice of Operations Research*, (pp.121-127). Monterrey, México: Editorial UANL.

Camacho-Vallejo, J. F., Cordero-Franco, A. & González-Ramírez, R. (2014a). Solving the bilevel facility location problem under preferences by a stackelberg-evolutionary algorithm. *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 430243, 14 pages.

Camacho-Vallejo, J. F., Mar-Ortiz, J., López-Ramos, F. & Pedraza Rodríguez, R. (2015b). A genetic algorithm for the bi-level Topological Design of Local Area Networks. *PLoS ONE 10*(6): e0128067. doi:10.1371/journal.pone.0128067

Camacho-Vallejo, J. F., Muñoz-Sánchez, R. & González-Velarde, J. L. (2015a). A heuristic algorithm for a supply chain's production-distribution planning. *Computers & Operations Research, 61*, 110-121.

Cánovas, L., García, S., Labbé, M. & Marín, A. (2007). A strengthened formulation for the simple plant location problem with order. *Operations Research Letters, 35*(2), 141-150.

Caramia, M. & Mari, R. (2016). A decomposition approach to solve a bilevel capacitated facility location problem with equity constraints. *Optimization Letters, 10*(5), 997-1019. doi: 10.1007/s11590-015-0918-z.

Casas-Ramírez, M. S. & Camacho-Vallejo, J. F. (2017). Analyzing valid bounds for a facility location bilevel problem with capacities. Accepted for publication in International Journal of Combinatorial Optimization Problems and Informatics.

Casas-Ramírez, M. S., Camacho-Vallejo, J. F. & Martínez-Salazar, I. A. (2017). Approximating solutions to a bilevel capacitated facility location problem with customer's patronization towards a list of preferences. *Applied Mathematics and Computation, 1-18*. https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.03.051

Dempe, S. (2002). *Foundations of bilevel programming*. New York, USA: Kluwer Academic Publishers.

Díaz, J. A., Luna, D. E., Camacho-Vallejo, J. F. & Casas-Ramírez, M. S. (2017). GRASP and Hybrid GRASP-Tabu Heuristics to Solve a Maximal Covering Location Problem with Customer Preference Ordering. *Expert Systems with Applications, 82*, 67-76.

Galvao, R. (2004). Uncapacitated facility location problems: contributions. *Pesquisa Operacional, 24*, 7-38.

Hakimi, S. (1964). Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. *Operations Research, 12*(3), 450-459.

Hanjoul, P. & Peeters, D. (1987). Facility location problem with client's preference orderings. *Regional Science and Urban Economics, 17*(3), 451-473.

Hansen, P., Jaumard, B. & Savard, G. (1992). New branch and bound rules for linear bilevel programming. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 13*(5), 1194-1217.

Insignares Movilla, J. & Orozco, E. (2014). The t distribution: a transformation of the employee of the brewery. *Investigación e Innovación en Ingenierías*, *2*(2), 36-43. https://doi.org/10.17081/invinno.2.2.2049

Kalashnikov, V. V., Herrera-Maldonado, R. C., Camacho-Vallejo, J. F., & Kalashnykova, N. I. (2016). A heuristic algorithm solving bilevel toll optimization problems. *The International Journal of Logistics Management, 27*, 31-51.

Kariv, O. & Hakimi, S. (1979). An algorithmic approach to network location problem. Part II: The p-medians. *SIAM Journal on Applied Mathematics, 37*, 539-560.

Krarup, J. & Pruzan, P. (1983). The simple plant location problem: survey and synthesis. *European Journal of Operational Research, 12*, 36-81.

Maldonado-Pinto, S., Casas-Ramírez, M. S. & Camacho-Vallejo, J. F. (2016). Analyzing the Performance of a Hybrid Heuristic for Solving a bilevel Location Problem under Different Approaches to Tackle the Lower Level. *Mathematical Problems in Engineering*, ID 9109824, 10 pages.

Marić, M., Stanimirović, Z., Milenković, N., & Đenić, A. (2015). Metaheuristic approaches to solving large-scale bilevel Uncapacitated Facility Location Problem with clients' preferences. *Yugoslav Journal of Operations Research*, *25*(3), 361-378.

Vasilév, I. & Klimentova, K. (2010). The branch and cut method for the facility location problem with clients preferences. *Journal of Applied and Industrial Mathematics, 4*(3), 441-454.

Vasilév, I., Klimentova, K. & Kochetov, Y. (2009). New lower bounds for the facility location problem with clients preferences. *Computational Mathematics and Mathematical Physics, 49*(6), 1010-1020.

Cómo citar este capítulo:
Casas-Ramírez, M. S. & Camacho-Vallejo, J. F. (2018). Considerando preferencias de los clientes en problemas de localización de instalaciones. En: A. Pulido-Rojano, P. Sánchez-Sánchez & E. Melamed-Varela. (eds.). *Nuevas tendencias en investigación de operaciones y ciencias administrativas. Un enfoque desde estudios iberoamericanos*. (pp.43-74). Barranquilla, Colombia: Ediciones Universidad Simón Bolívar.